力学２演義アドヴァンスト 問題１０ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

今日のテーマ：正準変換２

問１ [正準変換１]

(1) $W=\sum_i q_iP_i$ は恒等変換、$W=\sum_i p_iP_i$ および $W=\sum_i q_iQ_i$ は座標と運動量を入れ替える（符号も変わる）変換である。

(2) 答えのみ（q, P の式は各自で計算すること）。

(a) $p_1=P_1+P_2$, $p_2=P_2$, $Q_1=q_1$, $Q_2=q_1+q_2$

(b) $p_1=P_1+P_2$, $p_2=P_1-P_2$, $Q_1=q_1+q_2$, $Q_2=q_1-q_2$

(c) $p_1=P_1+P_2+P_3$, $p_2=P_2+P_3$, $p_3=P_3$, $Q_1=q_1$, $Q_2=q_1+q_2$, $Q_3=q_1+q_2+q_3$

(3) $q=e^{-Q}\sin p$ と $P=e^{-Q}\cos p$ から $W(Q,p)=e^{-Q}\cos p$ とすれば良い。

問２ [正準変換２]

(1)(a) $p=q\cot Q$, $P=\frac{1}{2}q^2\frac{1}{\sin^2 Q}$。整理して $q=\sqrt{2P}\sin Q$, $p=\sqrt{2P}\cos Q$, $H=P$ となる。

(b)(c) 略：$\dot{P}=0$, $\dot{Q}=1$ より位相空間上では P 一定の直線を描く。

(2) 略：$H=0$ となるから、位相空間上での軌道は不動な点となる。

問３ [正準変換３]

(1) 答えのみ。これらが求める座標変換を与えることは各自確かめよ。

(a) $W=-(p_xR\cos\theta+p_yR\sin\theta+p_zZ)$

(b) $W=-(p_xr\sin\theta\cos\phi+p_yr\sin\theta\sin\phi+p_zr\cos\theta)$

(2)(a) 答えのみ：$W=-p_x(\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t)-p_y(\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t)-p_z\zeta$

(b) $H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{2m}(P_\xi^2+P_\eta^2+P_\zeta^2)+V\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)+\omega(P_\xi\eta-P_\eta\xi)$

$$\dot{\xi}=\frac{P_\xi}{m}+\omega\eta,\quad \dot{\eta}=\frac{P_\eta}{m}-\omega\xi,\quad \dot{\zeta}=\frac{P_z}{m}$$

$$\dot{P}_\xi=-\frac{\partial V}{\partial\xi}+\omega P_\eta,\quad \dot{P}_\eta=-\frac{\partial V}{\partial\eta}-\omega P_\xi,\quad \dot{P}_\zeta=-\frac{\partial V}{\partial\zeta}$$

これが回転系での運動方程式を与えることは各自確かめよ。

問４ [微小正準変換]

(1) $G=p_i$：運動量の i 成分。

(2) $G=yp_x-xp_y=-L_z$：角運動量の z 成分（の逆符号）

(3) $G=(\mathbf{p}\times\mathbf{x})\cdot\mathbf{e}=-\mathbf{L}\cdot\mathbf{e}$

(4) 時間推進の生成子はハミルトニアン H になる。無限小変換を積み重ねて有限の変換を作ると、それもやはり正準変換である。これは正準方程式に従った時間発展はハミルトニアンを生成子とする正準変換であるということを表している。