力学２演義アドヴァンスト 問題１１ 2018/07/03

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

今日のテーマ：対称性と保存則

問１ [Noether の定理]

これまで特に循環座標の例で見てきたように、保存量は系の対称性と関係している。保存量をより一般的に導く手法が Noether の定理[*1]と呼ばれるものである。時間を陽に含まないラグランジアン $L(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f)$ について座標変換 $q_i \to Q_i = q_i + \delta q_i$ を考える。ただし δq_i は無限小の微小量 ϵ を用いて $\delta q_i = \epsilon S_i$ という形で書ける無限小の変換である。

(1) 変換前後のラグランジアンの差を ϵ の一次まで求めると以下の形になることを示せ。

$$L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \epsilon \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} S_i\right)$$

(2) ラグランジアンが無限小の座標変換に対して不変であるとは上の式がゼロとなることである。この時 $N = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} S_i$ は保存する。この量を Noether charge と呼ぶ。3 次元空間中でポテンシャルで相互作用する N 粒子の系のラグランジアン

$$L = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i}^2 - \sum_{i,j} V(|\mathbf{x}_\mathbf{i} - \mathbf{x}_\mathbf{j}|)$$

について、次の変換の保存量を求めよ。また前回出題した生成子との関係について論ぜよ。(a) x 方向の無限小推進：$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{e}_x$ (b) 無限小回転：$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{x} \times \mathbf{e}$（$\mathbf{e}$ は回転軸の単位ベクトル）

問２ [Laplace–Runge–Lenz ベクトル]

中心力ポテンシャル $V(r)$ で運動する質点 m を考える。

(1) Noether の定理を用いて角運動量 $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ が保存することを示せ。

(2) 微小変換 $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + (\epsilon \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}$（$\epsilon$ は定数ベクトル）によるラグランジアンの変化が

$$\delta L = r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon \cdot \mathbf{r}}{r}\right)$$

となることを示せ。

(3) ポテンシャル V による力が逆二乗則に従う（$-\frac{\partial V}{\partial r} = kr^{-2}$）場合を考える。$\delta L$ が時間の全微分で書ける（$\delta L = \frac{dW}{dt}$）時、一般化した Noether の定理：

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} S_i - W$$

が成り立つ。これを用いて (2) の変換に対応する保存量を求めよ。

[*1] 時間に依存する場合についても拡張することができる。Emmy Noether はドイツの女性数学者で、理論物理学や数学に絶大な貢献をした人物であるが当時は女性差別の時代であり大変苦労したようである。Noether の定理は「ピタゴラスの定理と並ぶほどの、現代物理学を導いた最も重要な定理の一つ」とまで言われる超重要定理である。

問３ [ラグランジアンの対称性]

以下の三つのラグランジアンを考える：

$$L_1 = \frac{1}{2}(\dot{q_1}^2 - \omega^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{q_2}^2 - \omega^2 q_2^2)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(\dot{q_1}^2 - \omega^2 q_1^2) - \frac{1}{2}(\dot{q_2}^2 - \omega^2 q_2^2)$$

$$L_3 = \dot{q_1}\dot{q_2} - \omega^2 q_1 q_2$$

(1) これらがどれも同じ運動方程式を与えることを確かめ、どのような運動の方程式か説明せよ。

(2) 運動方程式が同じだからと言って、どれもが同等に「良い」ラグランジアンではない。L_1 と L_2 はどちらが「良い」(「自然」な）ラグランジアンか、理由を付けて答えよ。

(3) 以下の、二つの座標を混ぜるような変換を考える（α は定数)。

$$Q_1 = q_1 \cos\alpha + q_2 \sin\alpha, \qquad Q_2 = -q_1 \sin\alpha + q_2 \cos\alpha$$

$$P_1 = p_1 \cos\alpha + p_2 \sin\alpha, \qquad P_2 = -p_1 \sin\alpha + p_2 \cos\alpha$$

(a) これが正準変換であることを確かめよ。

(b) α が無限小であるとき、この無限小正準変換の母関数を求めよ。

(c) L_1, L_2, L_3 がこの無限小正準変換に対し不変かどうか調べよ。不変である場合は対応する Noether charge を求めよ。

(4) 以上の結果をもとに、どのラグランジアンが最も「良い」ラグランジアンか説明せよ。

＊問４ [宇宙線の運動]（時間内に扱わなかった場合はレポート課題）

地球には宇宙から常に宇宙線（cosmic ray）と呼ばれる高エネルギーの荷電粒子が降り注いでいるが、その多くは地球の磁場によって偏向され地表には到達しない。以下簡単のため赤道面内の運動を考える。高エネルギー粒子は地球の重力に束縛されないので地球の重力は無視し、相対論的効果も無視する。地球の持つ磁気能率を μ とすると、質量 m、電荷 Ze の粒子のラグランジアンは以下のように与えられる[*2]。

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{Ze\mu}{c}\frac{\dot{\phi}}{r}$$

(1) r, ϕ に対応する運動量 p_r, p_ϕ とハミルトニアン H を求めよ。

(2) 以下簡単のため $p_\phi = 0$ の場合を考える。$\frac{dr}{d\phi}$ を求め、$\frac{dr}{d\phi} = 0$ となる半径 r_0 を計算せよ。

(3) $\phi = 0$ の時 $r = r_0$ としてこの粒子の (r, ϕ) 平面での軌道を求めよ。その結果を踏まえて、無限遠から入射した粒子が地球磁場に偏向されて再び無限遠に飛び去る時、その角度の変化を求めよ。

[*2] 標準的でないことを承知で cgs-Gauss 単位系を用いているが、定数分違うだけなので気にしないで欲しい。