力学２演義アドヴァンスト 問題１１ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

vspace0.5ex

今日のテーマ：対称性と保存則

問１ [Noether の定理]

(1) 略：定義通り計算するだけ。

(2) 答えのみ（符号は問わない）： (a) $\sum_i p_{x,i}$（x 方向の全運動量） (b) $\sum_i \mathbf{L}\cdot\mathbf{e}$（全角運動量の $\mathbf{e}$ に射影した成分）

問２ [Laplace–Runge–Lenz ベクトル]

(1) 略：回転に対してラグランジアンが不変。

(2) $\delta\mathbf{r} = \varepsilon(\mathbf{e}\times\dot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r}$（$\mathbf{e}$ は単位ベクトル、ε は微小な定数）と書きかえる。$\delta\mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ と直交する。また $\delta\dot{\mathbf{r}} = \varepsilon[(\mathbf{e}\times\ddot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r} + (\mathbf{e}\times\dot{\mathbf{r}})\times\dot{\mathbf{r}}]$。$\delta L = \frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}}\cdot\delta\mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}}\cdot\delta\dot{\mathbf{r}}$ だが、中心力場では $\frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}}$ は $\mathbf{r}$ と平行なので第一項は消える。また $\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}}$ だから、これと $\delta\dot{\mathbf{r}}$ の第二項との内積もゼロであり、結局

$$\delta L = \varepsilon m\dot{\mathbf{r}}\cdot[(\mathbf{e}\times\ddot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r}] = -\varepsilon\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\dot{\mathbf{r}}\cdot[(\mathbf{e}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}]$$

だけが残る。ベクトル三重積の公式を用いると

$$\delta L = -\varepsilon\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}[(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) - r^2(\mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{r}})]$$

これが証明すべき式と一致することは各自確かめよ。$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r^3}$ に注意せよ。

(3) $-\frac{\partial V}{\partial r} = kr^{-2}$ の時 δL が時間の全微分（$\delta L = \frac{dW}{dt}$）となる。この時

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}S_i - W$$

が保存量となる（一般的な Noether の定理：一度は証明してみること）。これを用いれば表題にある Laplace–Runge–Lenz ベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$（$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ は角運動量）が保存することを示せる。

問３ [ラグランジアンの対称性]

(1) どれも単振動する二つの質点の運動方程式を与える。

(2) 運動方程式では q_1 と q_2 は対等である。ラグランジアン L_1 でも q_1 と q_2 は対等だが、L_2 は q_1 と q_2 を入れ替えると符号が変わるので対称性が悪い（対等であって欲しいものが対等でない）。

(3)(a) 略：ポアソン括弧を計算するのが簡単。

(b) 略：生成子は $G = p_1q_2 - p_2q_1$ となる。

(c) L_1 は不変であり Noether Charge は $N = -G$。L_2, L_3 は不変ではない。各自確かめよ。

(4) 当然対称性が最も良い L_1 が性質の良いラグランジアンということになる。

問４ [宇宙線の運動]

(1)

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\phi = mr^2\dot{\phi} + \frac{Ze\mu}{cr}$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\phi - \frac{Ze\mu}{cr}\right)^2$$

ϕ が循環座標であるから p_ϕ は保存量である。またハミルトニアンが時間に陽に依存しないからエネルギーも保存する。

(2) エネルギー保存則から $\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - r^2\dot{\phi}^2$。$\frac{dr}{d\phi} = 0$ の時、つまり粒子が原点に最も接近する時（この時の座標に添字 0 を付けることにする）$\dot{r} = 0$ だから $m^2r_0^2\dot{\phi}_0^2 = 2mE$。$p_\phi = 0$ から $mr_0\dot{\phi}_0 = -\frac{Ze\mu}{cr_0^2}$ を代入すると

$$r_0^4 = \frac{1}{2mE}\left(\frac{Ze\mu}{c}\right)^2$$

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \left(\frac{Ze\mu}{mcr^2}\right)^2} \Big/ \left(\frac{Ze\mu}{mcr^3}\right) = \pm\frac{r}{r_0^2}\sqrt{r^4 - r_0^4}$$

(3) 粒子の軌道は $\phi = 0$ に関して対称。上式の符号はそれぞれ近づいてくる時と遠ざかる時に対応する。上の式を積分すると

$$\phi = \pm\int_{r_0}^{r} dr' \frac{r_0^2}{r'\sqrt{r'^4 - r_0^4}}$$

これを積分すると

$$r^2 = \frac{r_0^2}{\cos 2\phi}$$

という軌道が得られる（$r = 1/x^2$ のような変数変換を試してみよ）。$\phi = \pm\frac{\pi}{4}$ で $r = \infty$ となるから、無限遠から入射した粒子は $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ すなわち 90 度偏向されて無限遠に飛び去る。これは（$p_\phi = 0$ かつ水平面から入射する粒子についてではあるが）エネルギーに依らない。