

力学2 演義アドヴァンスト 問題1 2 2018/07/10

担当教員：富田 賢吾（宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

今日のテーマ：磁場中の荷電粒子の運動・総合演習1

問1 [電磁場中の粒子の運動]

- (1) (復習) 電磁場中を運動する荷電粒子のラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - e\phi$ から運動方程式を導け。ベクトル解析の公式を正しく用いること。
- (2) (復習) この L からハミルトニアンを求め、正準方程式を計算せよ。
- (3) 電場はなく空間的に一様な静磁場だけが存在する時ラグランジアンが角運動量 $\mathbf{j} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ を用いて $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{2m}\mathbf{B} \cdot \mathbf{j}$ と書けることを示せ。
- (4) 中心力ポテンシャル $V(r) = \frac{k}{2}r^2$ と一様な静磁場 $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ の中で運動する粒子を考える。
 - (a) 運動方程式をデカルト座標の各成分ごとに書き下せ。
 - (b) 磁場のない系の固有振動数を $\omega_0^2 = k/m$ とし、 $|\omega_0| \gg \left|\frac{eB}{2m}\right|$ の時を考える。この系の固有振動数と固有ベクトルを求めよ。ヒント：解を $x = x_0e^{i\omega t}$ 等として、運動方程式を対角化する。
 - (c) 上の結果を解釈しこの系の運動を説明せよ。特に、初期条件として xy 平面から傾けた円運動を与えるとどのような運動をするか？

問2 [総合問題：ケプラー運動]

太陽の周囲の天体の運動を考える。太陽の質量 M は天体より十分大きいので、太陽は原点から動かないと近似して*1ポテンシャルを $U = -\frac{GMm}{r}$ と表す。

- (1) 天体はある平面内を運動する。平面極座標でラグランジアンから運動方程式を導出せよ。
- (2) 天体の軌道 $r(\phi)$ を求めたい。 $\dot{\phi}$ を用いて $\frac{d}{dt}$ を消去し、新しい変数 $u = \frac{1}{r}$ を導入する。 u の従う方程式を導き、これを解いて $r(\phi) = \frac{l}{1+\varepsilon \cos \phi}$ と書けることを示せ。 l は通径、 ε は離心率と呼ばれる軌道を決定するパラメータである。
- (3) エネルギーが負・零・正の場合（または離心率が $0 < \varepsilon < 1, \varepsilon = 1, \varepsilon > 1$ ）にそれぞれ軌道がどのような幾何学的形状になるか分類せよ。ヒント：デカルト座標に戻すのが簡単か。
- (4) 粒子のエネルギーを l と ε を用いて表せ。軌道が楕円になっている時、長軸と短軸及び近日点 r_{min} ・遠日点 r_{max} を計算せよ。
- (5) 軌道が楕円になっているとき、その周期を求めたい。
 - (a) r の運動方程式に \dot{r} をかけて積分する。粒子が近日点または遠日点にあるときは $\dot{r} = 0$ であることから定数を決め、 \dot{r} の微分方程式を r_{min}, r_{max} を用いて表せ。
 - (b) 粒子が $r_{min} \rightarrow r_{max}$ に運動するのにかかる時間の2倍がこの軌道の周期である。周期が $T = \left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM}\right)^{1/2}$ となることを示せ ($a = (r_{min} + r_{max})/2 = l/(1 - \varepsilon^2)$ は軌道長半径)。適当な積分公式を用いて良い ($r = r_{min} \cos^2 \theta + r_{max} \sin^2 \theta$ という変数変換が有用かもしれない)。

*1 あるいは質量を換算質量と読み替えてもよい。

問3 [総合問題：拘束条件]

重力加速度を g とする。半径 R_1 の固定された球1の上に、半径 R_2 、質量 m の一様な球2が乗っている。球1は固定されていて、その上を球2は滑らずに運動する。

- (1) 球の中心を通る軸周りの慣性モーメントを求めよ。
- (2) 球1の頂点から初速度ゼロで球2を転がす。
 - (a) 球の間に働く垂直抗力を求めよ。
 - (b) 球が滑り落ちる（離れる）角度を求めよ。
 - (c) 第4回で扱った質点の場合と比較せよ。特に $R_2 \rightarrow 0$ の極限について論ぜよ。
- (3) 球2を同じ質量の薄い円盤に置き換えた場合はどうなるか。

*問4 [総合問題：SPH]*²（時間内に扱わなかった場合はレポート課題）

本来は連続である流体力学の方程式を、有限個の粒子集団の相互作用として近似的に（離散的に）表すことを考える。このような手法の一つに Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) と呼ばれるものがあり、宇宙物理学などのシミュレーションやCG等にも応用されている。これは流体要素を有限個の粒子で表現し、密度などの物理量を適当な滑らかな距離の関数を用いた重みづけ平均により計算する手法である。この手法の基礎方程式はラグランジアンから導出できる。

まずある点 \mathbf{r} における密度を

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N m_k f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|)$$

と表す。これは、ある点の密度を滑らかな重み関数 f をかけた周囲の粒子の質量の足し合わせで表現する、という意味である。 f は1/体積の次元を持つことに注意してほしい。 f は滑らかな減少関数で、有限の半径で十分小さくなるもの（例えば $f(r) = \frac{A}{h^3} e^{-r^2/h^2}$ 、 h は長さの次元を持つ定数）が選ばれるが、ここでは具体的な表式は問わない。次にラグランジアンを次の形で与える：

$$L = \sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}_j^2 - u_j(\rho_j, s_j) \right]$$

ここで $\rho_j = \rho(\mathbf{r}_j)$ であり、 u_j 、 s_j は j 粒子の単位質量あたりの内部エネルギー及びエントロピーである。各粒子は断熱的に振る舞うとすると s_j は全て定数となり、熱力学第一法則から

$$du_j = \frac{P_j}{\rho_j^2} d\rho_j$$

という関係がある。これらの関係式を用いて i 番目の粒子の運動方程式が

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} f(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

となることを導け。これは流体力学の方程式 $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho}$ を離散化したものになっている。

*² 見慣れない問題だが実は簡単な計算なので恐れずやること。