力学２演義アドヴァンスト 問題１２ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

問１ [電磁場中の粒子の運動]

(1) 答えのみ：$m\ddot{\mathbf{r}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$。（$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$）ベクトル解析の公式は必ず復習しておくこと。

(2) 答えのみ：$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi$。正準方程式は定義通り微分するだけである。

(3) 関係式 $\frac{1}{2}\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \mathbf{A}$（$\mathbf{A}$ は定数ベクトル）を使う。各自確かめよ。

(4)(a) 答えのみ：

$$\ddot{x} = \frac{eB_0}{m}\dot{y} - \omega_0^2 x$$

$$\ddot{y} = -\frac{eB_0}{m}\dot{x} - \omega_0^2 y$$

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z$$

(b) z の運動方程式は独立しており調和振動子的運動をすることが自明なので、x, y だけ考えて 2×2 の行列を対角化すればよい。別解として、$X = x \pm iy$ という変数を考えてもよい。固有値は $\omega \simeq \omega_0 \pm \frac{eB_0}{2m}$、固有ベクトルは $(1, \pm i)$。

(c) これらの固有運動は x と y が位相 $\pi/2$ ずれて振動、つまり円運動することを意味する（一般の運動は固有モードの重ね合わせである）。初期に傾けた円運動を与えた場合、z 方向の振動数と円運動の振動数が $\Omega = \frac{eB_0}{2m}$ 違うことから、回転軸が角振動数 Ω で z 軸周りに歳差運動をする。

問２ [総合問題：ケプラー運動]

(1) もう飽きる程やったはずなので答えのみ：

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{GMm}{r}$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r^2}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$$

(2) 角運動量保存 $h = r^2\dot{\phi} =$ 定数を用いて、誘導の通り変形すると動径方向の運動方程式は

$$\frac{d^2}{d\phi^2}u = -u + \frac{GM}{h^2}$$

定数項 $\frac{GM}{h^2}$ を除けばこれは単振動と同じ式だから $u = A\cos\phi + \frac{GM}{h^2}$（角度の原点は任意に取れる）。$l = \frac{h^2}{GM}, \varepsilon = \frac{Ah^2}{GM}$ とすれば $r(\phi) = \frac{l}{1+\varepsilon\cos\phi}$ を得る。

(3) $r = \sqrt{x^2+y^2}, \cos\phi = x/r = x/\sqrt{x^2+y^2}$ を代入して整理する。$0 < \varepsilon < 1$ の時楕円、$\varepsilon = 1$ の時放物線、$\varepsilon > 1$ で双曲線となる。

(4) $E=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-\frac{GMm}{r}$ は保存量なので近日点 $r_{\min}=\frac{l}{1+\varepsilon}$ で計算すれば ($\dot{r}=0$ に留意)

$$E=\frac{GMm}{2l}(\varepsilon^2-1)$$

ε の依存性が明らかな形にすること。長軸・短軸等の計算は容易なので略。

(5) (a) 動径方向の式を誘導通り積分すれば

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2=-\frac{h^2}{2r^2}+\frac{GM}{r}+C$$

となる。右辺を $1/r$ の二次式と見れば、定義から近日点・遠日点ではこの式は 0 となるので

$$\dot{r}^2=-h^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\min}}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\max}}\right)$$

(b) 略：誘導に従って積分すればよい。

問３ [総合問題：拘束条件]

第４回・第５回で出題した問題を組み合わせた発展版であり、解き方も変わらない。以下方針だけ解説する。

(1) 答えのみ：$I=\frac{2}{5}mR_2^2$。

(2) (a) 球 1 の中心を原点とし、真上を $\theta=0$ とする座標系を用いる。球 2 の円弧の長さを角度 ϕ で測り、球 1 の中心の周りの回転角度を θ とすると $R_1\theta=R_2\phi$。この間に実際に球 2 が回転した角度は $\alpha=\phi+\theta=\frac{R_1+R_2}{R_2}\theta$ であり、回転エネルギーは $E_{\mathrm{rot}}=\frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2$ であることに注意。垂直抗力はラグランジュの未定乗数法を用い、$r=R_1+R_2$ という拘束条件を用いればよい。

(b) 球が離れるまでを考え $r=$ 一定として運動を解き、垂直抗力が 0 になる点を求める。

(c) 球が離れる角度は $\phi=\cos^{-1}(10/17)$ であり質点の場合よりも大きい。これはエネルギーが球の回転にも分配されるためゆっくり転がり落ちるためである。

(3) 球の慣性モーメントを円盤のものに置き換えればよい。球の場合と比べて大小関係はどうなっているか考察せよ。

問４ [総合問題：**SPH**]

略。見慣れない問題かもしれないが単に与えられた定義通り合成関数の微分を行うだけである。

離散化されたシステムでも対応するラグランジアンがあるということは、その系が力学的に「良い」振る舞いをすることの裏付けであると同時に、このシステムを拡張し新たな手法や物理過程を導入する時の拠り所にもなる。一例としては、カーネル（重み）関数が $f(r)=\frac{A}{h^3}e^{-r^2/h^2}$ であるとき h は粒子の「支配する」領域の半径に対応するが、これを密度の関数として変化させる「可変スムーシング長」という技術がある。これは例えば $h_i=\eta\left(\frac{m_i}{\rho_i}\right)^{1/3}$ のように密度に応じて粒子のスムーシング長を変えることで、粒子が沢山集まっている＝高密度の領域で分解能を改善することができる。これを導入するには単に運動方程式で h を可変にするだけでは不十分であるが、ラグランジアンから導出すれば適切な運動方程式が得られる。このように数値計算においても解析力学は重要な基礎をなしているのである。