力学２演義アドヴァンスト 問題１３ 2018/7/17

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

今日のテーマ：場の解析力学・散乱・総合演習２

問１ [連続場の解析力学]

(1) 講義及び第二回の演習で既にやったように、連続的な（一次元の）場では場の変数を f としてラグランジアン密度 $\mathcal{L}\left(f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ を考える。これを積分した作用 $S = \int \left[\int \mathcal{L} dx\right] dt$ に対し $f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$ を独立変数として適当な端点条件を与えて変分原理を適用し運動方程式を求めよ。

(2) これを一般化すれば多次元の場に対する方程式に拡張できる。二次元の膜の振動（横波）を考えよう。膜の各点での変位を $z(x, y, t)$ とし、膜の面密度を σ、表面張力を S とする。膜の運動エネルギー密度は $\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sigma \dot{z}^2$ と書ける。ポテンシャルエネルギー密度は $\mathcal{V} = S\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} - 1\right)$ と書ける。$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ を求め、作用 $\iiint \mathcal{L} dx dy dt$ に変分原理を用いて運動方程式を求めよ。ただし変位は小さいとしてポテンシャルを展開すること。

(3) (2) で膜が一様重力場 $\mathbf{g} = -g\mathbf{e_z}$ 中にある場合はどうなるか。

問２ [**Klein-Gordon** 方程式]

N 個の質量 m、長さ l の振り子が一次元的にならんでいて、隣り合う振り子の間はばね定数 k のばねで繋がれている。振り子の振幅は十分小さいとして質点の変位 D と振り子の振れ幅 θ の間の関係を $D \simeq l\theta$ とする。この系の連続極限を以下に従って求めよ。適宜第２回問４を参照せよ。

(1) ラグランジアンを求めよ。ただし、N は十分大きいとして両端を無視して良い。

(2) 同様の方法でこのラグランジアンの連続近似を取り、ラグランジアン密度を求めよ。ただし振り子に起因する項の係数 ($V_p = \frac{1}{2}AD^2$ と書いた時の A) は $\Delta x \to 0$ の極限を取る際に $A = a\Delta x$ とし、a は定数とする。これは全ポテンシャルを一定に保ったまま極限を取ることに対応する。

(3) 運動方程式を求めよ。この形の方程式は Klein-Gordon 方程式と呼ばれており、場の量子論ではスピン 0 の相対論的な自由粒子を表す場の方程式に対応している。「振り子」の項は粒子の質量の効果に対応し、質量ゼロの極限では通常の波動方程式に戻る。

問３ [総合問題：極値での振動]

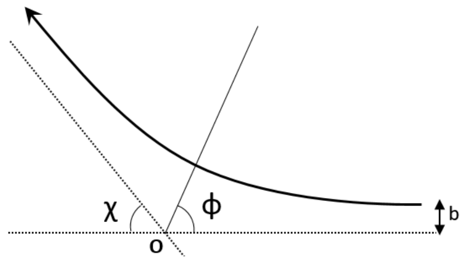
一様重力場 $\mathbf{g} = -g\mathbf{e_z}$ 中で質点が滑らかな曲面 $z = Ax^2 + 2Hxy + Ay^2$ $(A > H)$ に拘束されて運動する。最下点付近での運動について以下の問に答えよ。

(1) 規準振動の固有ベクトルと振動数を求めよ。

(2) 更に追加で質点がある鉛直な平面に拘束されているとする。平面と x 軸のなす角度を θ として、この時振動数はどうなるか。

(3) θ を変化させた時振動数が最大・最小となる角度を求め、元の固有振動との関係を調べよ。

問４ [散乱][*1]



右図（注：図の軌道は正確ではない）のように無限遠方から質量 m の粒子が衝突パラメータ[*2] b を持って入射し、中心力ポテンシャル $U(r)$ と相互作用して散乱角 χ の方向に出ていく。入射方向から測った粒子がポテンシャルの中心に最も近づく点の角度を ϕ_0 とする（$\chi = \pi - 2\phi_0$）。また無限遠での粒子の速度を v_∞ とする。

(1) ポテンシャル中心に最も近づいた時の半径を $r_{\min}$ とすると、

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}$$

と書けることを示せ。ただし無限遠でポテンシャルはゼロであるとする。ヒント：既に似たような問題は解いているが、運動方程式からエネルギーと角運動量保存を用いて $\frac{dr}{d\phi}$ を求め積分する。

(2) ポテンシャルに一方向から単位時間・単位面積あたり n [cm^{-2} sec^{-1}] の一様な粒子束を入射させる。単位時間あたりに χ から $\chi + d\chi$ の間に散乱される粒子の数を dN [sec^{-1}] とすると、これは n に比例するはずなので $dN = nd\sigma$ と書ける。この $d\sigma$ を有効散乱断面積と呼び、面積の次元を持っている。以下散乱角 χ と衝突パラメータ b の間に 1:1 の関係があるとする。粒子束の中で χ から $\chi + d\chi$ に散乱される粒子は衝突パラメータが b から $b + db$ の範囲にあるとする。系が軸対称であることを考慮すればこの範囲の粒子の数は $dN = 2\pi nbdb$、よって $d\sigma = 2\pi bdb$ である。これから、有効散乱断面積 $d\sigma$ と散乱角 χ の関係は

$$d\sigma = 2\pi b(\chi)\left|\frac{db(\chi)}{d\chi}\right| d\chi$$

と表される。これを踏まえて以下の問に答えよ。

(a) 散乱体が半径 a の絶対剛体球（$r < a$ で $U = \infty$）の時、$d\sigma$ を χ で表せ。またそれを χ について積分し、全断面積 σ を求めよ。

(b) 通常のニュートン重力ポテンシャルを持つ半径 R、質量 M の球の表面に粒子が到達する断面積を求めよ[*3]。 ヒント：粒子が球の表面に到達できる最大の衝突パラメータ $b_{\max}$ を求める。

(3) ポテンシャルがクーロン力に従う（$U(r) = \frac{\alpha}{r}$）時、(1) の「（Landau 曰く）初等的な」積分を実行し $b(\chi)$ を求めよ。必要なら適当な積分公式を用いて良い。その結果から (2) の式を用いて

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}} d\chi$$

または立体角 $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ を用いて

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$$

を導け（ラザフォードの公式）。これは α の符号に依らない、つまり電荷に依らず同じ式に従う。

[*1] 詳しくは例えばランダウ・リフシッツ「力学」第４章等を参照。以下議論は全て C 系である。

[*2] 無限遠での粒子の進行方向と、それに平行でポテンシャル中心を通る直線との距離。

[*3] この重力によって実行断面積が幾何学的断面積よりも大きくなる効果を重力フォーカシングと呼ぶ。この効果は惑星形成過程の中で、微惑星の衝突合体による暴走的成長において重要な役割を果たすことが知られている。