力学２演義アドヴァンスト 問題１３ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

今日のテーマ：場の解析力学・散乱・総合演習２

問１ [連続場の解析力学]

(1) 積分領域の境界で全ての変分をゼロとする端点条件を与えて通常通り変分すればよい。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = 0$$

(2) ポテンシャルを展開すれば $\mathcal{V} \simeq \frac{1}{2}S\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]$ であり、２次元に拡張したオイラー・ラグランジュ方程式を計算すれば

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{S}{\sigma}\nabla^2 z$$

（$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は２次元のラプラシアン）という２次元の波動方程式を得る。

(3) 略：ポテンシャルに重力エネルギー $\sigma g z$ を付け加えて計算せよ。

問２ [**Klein-Gordon** 方程式]

(1) 振り子のポテンシャルは振れ幅が微小ならば $mgl(1-\cos\theta) \simeq \frac{1}{2}mgl\theta^2$。ラグランジアンは

$$L = \sum_i^N \frac{1}{2}m\dot{D_i}^2 - \sum_i^N \frac{1}{2}k(D_{i+1}-D_i)^2 - \sum_i^N \frac{1}{2}\frac{mg}{l}D_i^2$$

(2) 問題２の問４と同様にして（ただし $\alpha = \frac{\rho g}{l}$）

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\alpha D^2$$

(3) 問１と同様にして

$$\rho\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \alpha D = 0$$

これは古典論における Klein-Gordon 場の方程式と同じ形をしている。

問３ [総合問題：極値での振動]

最下点付近の微小振動を考える。拘束条件から $z \propto x^2$ 等なので z 方向の運動は無視できる。ラグランジアンは $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(Ax^2 + 2Hxy + Ay^2)$。

(1) 通常通り運動方程式を対角化すれば固有値は $\omega = \sqrt{2g(A \pm H)}$、固有ベクトルは $(1, \pm 1)$。

(2) θ 回転した座標系 X, Y に変換し、拘束条件から Y=0 とするとポテンシャルが $U = (A + H\sin 2\theta)X^2$ と書けるので、振動数は $\omega = \sqrt{2g(A + H\sin 2\theta)}$。

(3) $0 < \theta < \pi$ の範囲で考えると、$\theta = \pi/4$ の時最大、$\theta = 3\pi/4$ の時最小値を取る。これらは元の系の固有振動数と対応している。

問４ [散乱]

(1) 略

(2)(a) 幾何学的に球の表面での反射を考えて衝突パラメータと散乱角の間の関係を求めると $b = a\cos\frac{\chi}{2}$。これを散乱断面積の定義に入れて計算すれば $d\sigma = \frac{\pi a^2}{2}\sin\chi d\chi$。これを全ての散乱角について積分すれば $\sigma = \pi a^2$ を得る。これは球の幾何学的な断面積と一致する。

(b) 球の表面に到達可能な最大の衝突パラメータを求めれば良い。このような粒子がポテンシャル中心に最も近づく半径を $r_{\min}$ とすれば $r_{\min} = R$ であり、その場所では動径速度 $\dot{r}$ はゼロだからエネルギーは $E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{R}$ である。一方エネルギーと角運動量の保存から無限遠での値を考えると $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$、 $h = R^2\dot{\theta} = bv_\infty$（問題１２問２も参照)。これらを用いると

$$\frac{mv_\infty^2 b_{\max}^2}{2R^2} - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

$$\sigma = \pi b_{\max}^2 = \pi R^2\left(1 + \frac{2GM}{Rv_\infty^2}\right)$$

となり、球の表面での重力ポテンシャルと無限遠での運動エネルギーの比に相当する分だけ重力によって断面積が幾何学的な断面積よりも大きくなる。

(3) 略。「初等的積分」は問題１２の問２で既に計算済みである（$GMm \to -\alpha$ と置き換えて、$l = \frac{mh^2}{\alpha}, \varepsilon = \frac{Amh^2}{\alpha}$ と取り直せば $r = \frac{l}{\varepsilon\cos\phi - 1}$)。散乱角度はこの軌道から求めることができる（$r = \pm\infty$ となる ϕ を求める。ε はエネルギーから計算できる)。詳しくはランダウ・リフシッツ「力学」第４章等を参照。