

力学2 演義アドヴァンスト 問題1 解説

担当教員：富田 賢吾（宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

出題の意図について：

- 出題している問題はそれぞれに学習してもらいたい意図があります。各回のテーマに沿って重要かつ、各テーマを理解していれば解ける問題を選んでいきますし、解けるべき問題しか出していません。漫然と計算するのではなく、何を求められていて何を学ぶべきかを意識して有意義かつ効果的な学習を心がけて下さい。
- 身近なテーマや現実の研究上の応用につながる面白い問題を選んでいくつもりです。
- 無意味に煩雑（出題者がぐえっとなるような計算が必要）な問題や、特に物理的に重要でない「問題のための問題」は意図的に避けています（定番問題を除く）。この程度の計算力は物理学を学ぶ上で「基礎体力」として必要です。不足しているなら努力してください。
- ラグランジアンまたは運動方程式を求めさせて、そこから先は複雑すぎて解けないので終わりという問題が解析力学ではありがちです。そのような問題は解いたことにはならないという信念のもと、できる限り解ける工夫をするような問題を作っています。
- 解析力学は実際に計算できる問題に限られているためどの教科書にもよく似た問題が載っています。調べれば必ず何らかのヒントは得られるので諦めずに取り組んでください。
- 演義はテストではないので自分の力だけで解く必要はありません。むしろその過程で調べたり友人と相談したりして知識を獲得し学習することが重要です。毎回必ず十分に準備し、わからなければ TA に質問するなどして、完全な状態で授業に臨んでください。

問題1 数学的準備・変分法

問1 [物理量の次元]

略。物理量の次元（単位）には重要な意味があり、それに着目するだけでかなり色々な議論ができるということの紹介。

問2 [ニュートン力学・座標変換]

略。一年生の力学の授業の復習。これができないようなら一年生に戻った方が良い。

問3 [変分法1]

(1) 略。直線という自明な解になる。

(2) 定番問題。幅 dx に対応する側面の「斜辺」の長さは $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ であり、これを半径 y で回転させたものが側面積の面積要素 $dS = \int y dl d\phi$ となる。これを 0 から a まで積分すれば

$$S(x) = \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

積分の中身がラグランジアンに対応する。これからオイラー・ラグランジュ方程式を求めても良いが、ラグランジアンが時間（この場合 x ）を陽に含んでいないので「エネルギー保存則」あるい

は「ベルトラミの定理」を用いると微分の次数が一つ減り便利である。

$$H = L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

が定数となる（一度は必ず自分で示すこと）から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - H^2}}{H}$$

この解が双曲線であることは各自示せ。定数は解が指定された点を通るように決める。

問4 [変分法2：最速降下曲線]

定番問題。座標はどのようにとっても良いが、問題で指定した取り方なら「ベルトラミの定理」を使わなくても解きやすい。水平方向を x 、垂直方向を y と取った場合の解法は力学2の授業の方で扱ったはずである。定番問題なので多くの教科書やネット上の資料に情報があるが、例えば岩波書店 物理入門コース2「解析力学」（小出昭一郎）の3章等を参考のこと。

(1) エネルギー保存則から速度は $v = \sqrt{2gx}$ と書ける。O から A までにかかる時間は

$$t = \int_0^A dt = \int_0^A \frac{ds}{v} = \int_0^A \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}} dx \quad (1)$$

でありこれを変分法を用いて最小化すればよい。オイラー・ラグランジュ方程式から

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}} = 0$$

となる。この微分の中身は定数となるのでそれを適当にとれば

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

が得られる。これがサイクロイドであることを示すにはパラメータ表示 $x(\theta) = a(1 - \cos \theta)$, $y(\theta) = a(\theta - \sin \theta)$ を用いて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

が上の微分方程式と一致することを示せばよい。

(2) サイクロイドの等時性^{*1}を示す問題。初期位置の x 座標を $x = x_0$ とすれば、エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(x - x_0)$$

と書ける^{*2}。(1) 式のを速度をこれに置き換えて降下時間を計算する。パラメータ表記での軌道はわかっているの、 x_0 に対応する角度を θ_0 としてパラメータ表記で θ_0 から π まで積分を計算すればよい。すると積分が初期位置 θ_0 に依らないことを示すことができる。

^{*1} 初期位置に寄らず最下点まで降下するのにかかる時間が等しいという意味。軌道がサイクロイドとなるような振り子の周期は振幅に依らない。一回でもサイクロイドについて調べれば必ず目にするよく知られた性質である。

^{*2} 前問のエネルギー保存則で得られる速度の表式をそのまま使った解答があまりに多かった。それでは初速度ゼロにはならないことは明らかである。問題文をよく読みその意図を理解せよ。