

## 力学2 演義アドヴァンスト 問題2 2018/4/17

担当教員：富田 賢吾 (宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616)

TA：荒田 翔平 (arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624)

仲田 祐樹 (nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617)

### 今日のテーマ：ラグランジュ形式の力学

#### 問1 [ラグランジアン]の性質]

(1) ある運動方程式を与えるラグランジアンは一意に決まるものではない。ラグランジアン  $L$  に対し適当な座標の関数  $W(x_1, x_2, x_3, \dots)$  の時間 (全) 微分  $\frac{dW}{dt}$  を足した  $L' = L + \frac{dW}{dt}$  を考える。この  $L'$  も  $L$  と同じ運動方程式を与えることを示せ。

(2) 自由運動する一粒子を考える。この粒子を速度  $\mathbf{u}$  で等速直線運動する系から見た場合 (ガリレイ変換)、ラグランジアンがどのように表されるか、また運動方程式がどのようになるか調べよ。

(3) ラグランジアン  $L(x_1, x_2, \dots, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, t)$  を考える。 $L$  が  $x_i$  を陽に含まず、時間微分  $\dot{x}_i$  のみを含むとする (この時  $x_i$  を循環座標と呼ぶ)。この時対応する保存量が存在することを示せ。

(4) ラグランジアン  $L(x_1, x_2, \dots, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots)$  が時間に陽に依存しないとする。この時

$$H \equiv \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

が保存する (時間に依存しない) ことを示せ。

(5) 前問で  $L$  が  $L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U(x_1, x_2, \dots)$  と表される時、 $H$  を求めその意味を説明せよ。

#### 問2 [二粒子間相互作用]

質量  $m_1, m_2$  の二つの粒子が距離のみに依存するポテンシャル  $V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$  で相互作用している。

(1)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  を独立変数としてラグランジアンを書き、運動方程式を求めよ。

(2) 上手に変数を組み合わせて新しい独立変数の組を作り、ラグランジアンを書き換えて問題の見通しを良くしたい。どのような独立変数を取るのが適切だろうか? ヒント：循環座標を作る。

(3) このような系に存在する保存量を求めよ。

#### \*問3 [線形・非線形振動子、変分法の応用]

ばね定数  $k$  のばねに繋がれた質量  $m$  の質点の一次元の運動を考える。

(1) ばねは自然長 (平衡点) からの変位  $x$  に比例する力  $F(x) = -kx$  を質点に及ぼす。ポテンシャルとラグランジアンを求めよ。

(2) 質点を平衡点から距離  $A$  だけ引っ張って静かに手を放す。この時の解を求めよ。

(3) 現実的にはばねの及ぼす力は必ずしも変位に比例するとは限らない。例として、運動方程式が以下のような小さな定数  $\epsilon$  に比例する非線形項を持つ場合を考える。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = 0$$

この系のラグランジアンを求めよ。

(4) 前問で求めたラグランジアンから作用を作って変分しても、当然のことだが元の運動方程式に戻るだけである。そこで線形振動子の既知の解からのズレが小さいとして解の形を仮定 (trial

function と呼ぶ) し、そのパラメータについて変分法を用いて近似解を求めるという手法がある。以下の手順に従い前問の非線形振動子の周期を求めよ。

- (i)  $\epsilon$  が小さければ解は線形振動子に近いと考え、 $x = A \sin(\omega t)$  という解を仮定する。
- (ii) これは周期解なので、その一周 (  $t = 0$  から  $2\pi/\omega$  まで ) について作用積分を作る。
- (iii) 上式を代入して作用を計算し、ある  $A$  で極値を取るという条件から  $\omega$  と  $A$  の関係を求めよ。
- (iv) これは仮定した解の形の範囲内で可能な限り正解に近い条件を求めたことになる。実はこのような非線形振動子の周期には以下のような厳密解 ( 寺沢寛一 1960 ) が知られている。

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} d\theta \left[ 1 + \epsilon \frac{A^2}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \right]^{-1/2}$$

これと (iii) で求めた解を比較せよ。

#### 問4 [連成振動子、連続極限、波動]

$N$  個の等質量  $m$  の質点がばね定数  $k$  の理想的なばねによって一直線に繋がれている ( こんな感じ :  $-\bullet-\bullet-\bullet-\bullet-\bullet-\bullet-\bullet-\bullet-$  )。全ての粒子は直線に沿った方向に一次的に動く。

(1)  $i$  番目の質点について、平衡点からの変位を  $D_i$  とする。全ての変位が 0 の時ばねは全て自然長にあり、粒子間の距離は等間隔  $\Delta x$  になる。 $D$  を独立変数としてこの系のラグランジアンを求め、 $i$  番目の粒子の運動方程式を書き下せ。ただし両端の粒子の振る舞いについては問わない\*1。

(2) この系の連続極限 ( $N \rightarrow \infty$ ) を以下のような手順に従って考えよ。

(i)  $D_{i-1} \rightarrow D(x - \Delta x, t), D_i \rightarrow D(x, t), D_{i+1} \rightarrow D(x + \Delta x, t)$  のように  $D$  を時間と位置の連続な関数に書き直す。

(ii) 質量  $m$  を質量線密度  $\rho$  を用いて  $m \rightarrow \rho \Delta x$  と置き換える ( 長さ  $\Delta x$  あたりの質量が  $m$  )。

(iii) ばねを  $\Delta x$  変位させた時にかかる力が一定だとして  $k \Delta x \rightarrow T$  と置き換える。

(iv)  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限を取り。この時  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限で  $\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial A}{\partial x}(x + \Delta x/2)$ ,  $\frac{B(x+\Delta x/2)-B(x-\Delta x/2)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial B}{\partial x}(x)$  を使う。

(v) 結果下のような波動方程式が得られることを示せ。ダランベールの解と呼ばれる解について自分で調べ、それが確かにこの方程式の解であることを示せ。また  $c$  の物理的意味を説明せよ。

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}$$

(3) 同じ連続極限をラグランジアン of 段階で適用してみよう。 $N$  についての和を積分に置き換えるが、この時系の長さを一定とする。すると、ラグランジアンが以下のように書き換えられる。

$$L = \int \mathcal{L} \left( \frac{\partial D}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial x} \right) dx$$

ラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  の具体的な形を求めよ。またこのラグランジアンから作用を構成して最小作用の原理を適用し、オイラー・ラグランジュ方程式が波動方程式となることを確かめよ。

\*1 全ての粒子  $i$  について対称な形にして良い、という意味