力学２演義アドヴァンスト 問題２ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

問 1 [ラグランジアンの性質]

(1) $L' = L + \frac{dW}{dt} = L + \dot{W}$ がオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x_i}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x_i} = 0$$

を満たすことを示す。L がオイラー・ラグランジュ方程式を満たすのは明らかなので

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial \dot{x_i}}\right) - \frac{\partial \dot{W}}{\partial x_i} = 0$$

であることを示せばよい。

(2) 略。運動方程式はガリレイ変換に対して不変である。

(3) 循環座標についての問題。x_i が循環座標の時、L は x_i を陽に含まない。つまり、

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

なのでオイラー・ラグランジュ方程式から

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}\right) = 0$$

となる。したがって共役運動量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}}$ が保存量だと分かる。

(4) H の時間微分が 0 になることを示せばよい。$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ とオイラー・ラグランジュ方程式を用いれば、$\frac{dH}{dt} = 0$ と求められる。

(5) $L = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x_i}^2 - U(x_1, x_2, \cdots)$ となるとき H の定義式に代入して

$$H = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x_i}^2 + U(x_1, x_2, \cdots)$$

を得る。これより H は全エネルギーであると分かる。

問 2 [二粒子間相互作用]

(1) ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{\mathbf{x_1}}^2 + m_2 \dot{\mathbf{x_2}}^2) - V(|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}|)$$

運動方程式は

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x_1}} = -\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{x_1}} = -\dfrac{\partial V}{\partial |\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}|}(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x_2}} = -\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{x_2}} = -\dfrac{\partial V}{\partial |\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}|}(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \end{cases}$$

(2) 重心を $\mathbf{X}=\dfrac{m_1\mathbf{x_1}+m_2\mathbf{x_2}}{m_1+m_2}$、相対座標を $\mathbf{x}=\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}$ とするとラグランジアンは

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\mathbf{X}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{x}}^2-V(|\mathbf{x}|)$$

の形にかける。ただし $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ は換算質量。ラグランジアンを見ると $\mathbf{X}$ が循環座標だと分かる。

(3) (2) より $\mathbf{X}$ は循環座標なので共役運動量 $\mathbf{p}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{X}}}=(m_1+m_2)\dot{\mathbf{X}}$ が保存される。これは系の全運動量である。また、ラグランジアンは時間に陽に依存していないので問 1(4)(5) よりエネルギーも保存される。

問 **3** [線形・非線形振動子、変分法の応用]

(1) ラグランジアンは

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$$

(2) 運動方程式は $m\ddot{x}+kx=0$ であるから、初期条件より

$$x=A\cos(\omega_0 t)\qquad\left(\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

(3) 運動方程式からばねの及ぼす力 $F(x)=-\omega_o^2x-\epsilon x^3$ なのでポテンシャル $U(x)$ は

$$\begin{aligned}U(x)&=-\int F(x)dx\\&=\frac{1}{2}\omega_o^2x^2+\frac{1}{4}\epsilon x^4\end{aligned}$$

となる。したがってラグランジアンは

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\omega_o^2x^2-\frac{1}{4}\epsilon x^4$$

と求めることができる。

(4) (i)〜(iii) 問題文の誘導に従って計算すればよい。作用 I は

$$I=\frac{\pi\omega}{2}A^2-\frac{\pi}{2}\frac{\omega_o^2}{\omega}A^2-\frac{3\pi}{16}\frac{\epsilon}{\omega}A^4$$

なので、ある A で極値をとるという条件から A で微分して整理すると

$$\omega^2=\omega_0^2+\epsilon\frac{3}{4}A^2$$

と計算できる。

(iv) 厳密解の右辺の被積分関数を $\epsilon<<1$ として展開すると

$$\frac{2\pi}{\omega}\simeq\int_0^{\pi/2}d\theta\left[1-\epsilon\frac{A}{2\omega_0^2}(1-\cos^2\theta)\right]$$

計算すると (iii) で求めた関係式と一致することが分かる。

問 **4** [連成振動子、連続極限、波動]

(1) ラグランジアンは

$$L = \sum_i \left[\frac{1}{2} m \dot{D_i}^2 - \frac{1}{2} k (D_i - D_{i-1})^2 - \frac{1}{2} k (D_{i+1} - D_i)^2 \right]$$

なので i 番目の粒子の運動方程式は

$$m\ddot{D}_i + k(2D_i - D_{i-1} - D_{i+1}) = 0$$

と書ける。

(2) (1) の運動方程式を連続な関数に書き直すと

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{D(x+\Delta x, t) - D(x,t)}{\Delta x} - \frac{D(x,t) - D(x-\Delta x, t)}{\Delta x} \right]$$

と書けるので、$\Delta x \to 0$ の極限をとると波動方程式

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}$$

を得る。ただし、$c = \sqrt{T/\rho}$ は波の速度を表す。ダランベールの解 $D(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct)$ が波動方程式を満たすことは各自示せ。

(3) 略。詳しくは講義資料 p.15 以降を参照のこと。