力学２演義アドヴァンスト 問題３ 2018/4/24

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

今日のテーマ：ラグランジュ形式の力学２、一般化座標

問１ [一般化座標１・座標変換]

第一回の問２をラグランジュ形式で解こう。点源重力ポテンシャル場 $V = -\frac{GM}{r}$ の中で運動する質量 m の質点の運動を考える。

(1) ラグランジアンを球座標で書き下し、オイラー・ラグランジュの運動方程式を求めよ。ただし今回は３次元で計算すること。

(2) 同様にラグランジアンを円筒座標で書き、オイラー・ラグランジュの運動方程式を求めよ。

(3) 各座標系で対応する一般化運動量を求めよ。

(4) この系の保存量を求めよ。ヒント：循環座標と対称性

＊問２ [一般化座標２・振り子の運動]（時間内に扱わなかった場合はレポート課題）

長さ l (m) の軽い糸で吊るされた質量 m (kg) の振り子を考える。重力加速度を $g\,(\mathrm{m/s^2})$ とする。

(1) 鉛直真下方向から測った角度を θ として、振り子が θ 振れているときの質点の運動方程式を水平方向を x、鉛直方向を y とした*デカルト座標で*書きなさい。ただし、糸がたるむことはないとし、糸の張力を T とする。

(2) 振り子の振幅が非常に小さいとすれば、鉛直方向の運動はほぼ無視して良い（$\ddot{y} \sim 0$)。この時、T を消去して水平方向の運動方程式を近似的に導出し、その運動を解け。

(3) 上の運動方程式には一般には未知の力 T が含まれていて厄介である[*1]。しかし、ラグランジュ形式では適切に座標を取ることで解きやすい形に変換することが（比較的）容易にできる。ここでは振り子の根元を原点とする極座標 (r, θ) を一般化座標としてこの系のラグランジアンを求めよ。

(4) 糸の長さが一定であれば r は定数 l であり、θ のみ考えればよいことになる[*2]。θ についてオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。また θ に対応する一般化運動量を求めよ。

(5) θ が小さいとしてその運動を解け。

[*1] この張力は質点の運動を半径 l の円上に拘束する役割を果たしており、拘束力と呼ぶ。拘束力を含む場合の解法は次回の授業で扱うはずなので、ここでは別の方法を扱う。

[*2] この時動径方向については糸による拘束力とその他の力が「適当に」釣り合うことになっている

問３ [平衡点近傍での運動]

(1) 質量 m の粒子が滑らかなポテンシャル $U(x)$ の中を一次元的に運動する。

(a) この U が $x = x_0$ で極値を持つ。$U(x)$ を $x = x_0$ の周りでテイラー展開しなさい。

(b) 前項の結果を用い、$x = x_0$ からの変位が小さい時にラグランジアンを求め、運動を解け。またこの平衡点が安定（変位が十分小さければ平衡点付近にとどまる）である条件を求めよ。[*3]

(2) 質量 m の粒子が滑らかな中心力ポテンシャル $U(r)$ の中を半径 $r = r_0$ の円運動をしている。

(a) 角運動量 $h = mr^2\dot{\theta}$ が保存することから $\dot{\theta}$ を消去し、r 方向の一次元的な運動と見なしてその有効ポテンシャル $U_{\rm eff}(r)$ を求めよ。またこの円運動が安定であるための条件を求めよ。

(b) この質点が r 方向の力を受けて角運動量は変わらないまま平衡点からわずかにずれ、平衡点のまわりで振動するような運動をはじめた。この振動の周期を求めよ。

(c) $U(r) = Kr^3\,(K > 0)$ の時、この円運動の周期と平衡点回りの振動の周期を具体的に求めよ。

問４ [連成振動子]

固定された壁の間に質量 m の質点 1,2 があり、質点 1 は左の壁、質点 2 は右の壁とばね定数 c のばねで繋がれており、更に質点 1 と 2 の間はばね定数 k のばねで繋がれている（こんな感じ：壁—(c)—○—(k)—○—(c)—壁）。平衡状態ではばねは全て自然長にある。この質点の一次元的な運動を考える。

(1) 質点 1,2 の平衡点からの変位をそれぞれ x_1, x_2 としてラグランジアンを書き、x_1, x_2 についての運動方程式を求めよ。

(2) やや天下り的ではあるが、x_1, x_2 が同じ位相で運動する解を求めてみる。$x_1 = A_1\cos(\omega t + \alpha), x_2 = A_2\cos(\omega t + \alpha)$ の形に解を仮定して、非自明な $(A_1 \neq 0, A_2 \neq 0)$ 解を持つ条件からこの系の固有（基準）振動数と固有ベクトルを求めよ。ヒント：式を

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

のように行列を用いて表し、この行列の行列式[*4]が 0 となる条件を求める。

(3) 前問の結果をもとに、この方程式の一般解を求めよ。

(4) ラグランジアンの段階で適切に一般化座標を取ることでこの問題をより見通し良く解くことができる。どのような一般化座標を取ればよいか考え、それを用いてラグランジュの方法で一般解を求めよ。ヒント：(2),(3) の答えが参考になる。

(5) 初期に片方の質点のみ平衡点からずらして初速度 0 で離した時、両質点の運動を求めよ。ばね定数 k が c と比べて非常に小さい場合を考え、その運動を横軸を時間、縦軸を位置に取ったグラフ上に表せ（定性的で構わない）。

[*3] 何故物理の勉強に調和振動子がしつこいほど登場するのかと言えば、それだけ一般的で重要だからである。

[*4] 1 年の線形代数で習ったはず。忘れた人・習っていないと主張する人は猛省の上復習しておくこと。線形代数の意義が数学の授業ではわからなかったかもしれない（伝わらないのは講義に問題がある）が、線形代数、特に固有値や固有ベクトル、行列式や対角化と言った概念は力学・量子力学などの基礎から流体や物性等の応用まで、物理のあらゆる分野で現れる。物理学を志すならば線形代数は極めて実用的かつ必須なので、意欲をもって学習して欲しい。