力学２演義アドヴァンスト 問題３ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

今日のテーマ：ラグランジュ形式の力学２、一般化座標

問１ [一般化座標１・座標変換]

(1) 球座標 (r,θ,ϕ) の時、ラグランジアンは

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\frac{GMm}{r}$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\frac{GMm}{r^2}=0$$

$$m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)=0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}\sin\theta)=0$$

(2) 円筒座標 (R,θ,z) の時 $V=-\frac{GM}{\sqrt{R^2+z^2}}$ に注意して、ラグランジアンは

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{R}^2+R^2\dot{\theta}^2+z^2)+\frac{GMm}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$m(\ddot{R}-R\dot{\theta}^2)+\frac{GMm}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}R=0$$

$$\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta})=0$$

$$m\ddot{z}+\frac{GMm}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}z=0$$

(3)(4) 球座標では ϕ、円筒座標では θ が循環座標なので、それぞれの共役運動量 $p_\phi=mr^2\dot{\phi}\sin\theta$、$p_\theta=mR^2\dot{\theta}$ が保存される。これらはどちらも角運動量の z 成分である。またラグランジアンが時間に陽に依存しないため全エネルギーも保存する。各自確認すること。

問２ [一般化座標２・振り子の運動]

(1) 運動方程式は $m\ddot{x}=-T\sin\theta$、 $m\ddot{y}=mg-T\cos\theta$。

(2) $\ddot{y}\sim 0$ の時、T を消去することで運動方程式は

$$\ddot{x}=-\frac{g}{l}x$$

と書ける。ここで $\tan\theta = \frac{x}{y} \sim \frac{x}{l}$ に注意せよ。これを解くと $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right)$ である。ただし x_0、α は定数。

(3) ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta$$

(4) $r = l$ の時、θ についてのオイラー・ラグランジュ方程式は

$$ml\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

(5) $\theta \ll 1$ のとき運動方程式は

$$\ddot{\theta} \simeq -\frac{g}{l}\theta$$

これを解くと $\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta\right)$ である。ただし θ_0、β は定数。

問３ [平衡点近傍での運動]

(1)(a) $U(x)$ を $x = x_0$ の周りでテイラー展開すると

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ただし、$U^{(n)}(x)$ は $U(x)$ の n 次導関数。$U(x)$ は $x = x_0$ で極値を持つので、一次の項を落として

$$U(x) = U(x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{U^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

(b) $x = x_0$ からの変位が小さいとき $U(x)$ を 2 次まで展開して、かつ定数項は無視して良いので、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

運動方程式は

$$m\ddot{x} + U''(x_0)(x - x_0) = 0$$

$U''(x_0) > 0$、$U''(x_0) < 0$ のそれぞれの場合の運動を解くことで $U''(x_0) > 0$ のとき解が平衡点で安定となることを各自確かめよ。これは安定な平衡点ではポテンシャルが下に凸であることを意味している。

(2)(a) 有効ポテンシャルは

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{h^2}{2mr^2} + U(r)$$

円運動が安定であるための条件は (1)(b) より（平衡点なので $U'_{\text{eff}}(r_0) = 0$）

$$U''(r_0) + \frac{3h^2}{m{r_0}^4} > 0$$

(b) 運動方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} = \frac{h^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr}$$

$r = r_0 + r_1$ $(r_1 \ll r_0)$ とし、運動方程式を r_0 の周りで展開すると

$$m\ddot{r_1} \simeq -\left(\frac{3h^2}{m{r_0}^4} + U''(r_0)\right) r_1$$

ここから微小振動の周期は

$$T_1 = 2\pi\sqrt{m}\left(\frac{3h^2}{m{r_0}^4} + U''(r_0)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(c) $U(r) = Kr^3$ の時、$U'_{\text{eff}}(r_0) = 0$ と角運動量保存則から

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3Kr_0}{m}}$$

ゆえに円運動の周期は

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3Kr_0}}$$

微小振動の周期は前問 (b) の結果を用いて、

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{15Kr_0}} \quad \left(= T_0/\sqrt{5}\right)$$

問４ [連成振動子]

(1) ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) - \frac{c}{2}({x_1}^2 + {x_2}^2) - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2$$

運動方程式は

$$m\ddot{x_1} + cx_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m\ddot{x_2} + cx_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

(2) 固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \sqrt{\frac{c+2k}{m}}$$

$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ の時、固有ベクトルは $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(A : \text{定数})$

$\omega = \sqrt{\frac{c+2k}{m}}$ の時、固有ベクトルは $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(B : \text{定数})$

(3) (2) の結果から一般解は定数 A、B、α、β を用いて

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t + \alpha\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{c+2k}{m}}t + \beta\right) \\ x_2 = A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t + \alpha\right) - B\cos\left(\sqrt{\frac{c+2k}{m}}t + \beta\right) \end{cases}$$

(4) 略：$y_1 = x_1 + x_2$、$y_2 = x_1 - x_2$ として計算するとよい。

(5) $k/c \ll 1$ のとき

$$\omega = \sqrt{\frac{c+2k}{m}} \simeq \sqrt{\frac{c}{m}}\left(1+\frac{k}{c}\right)$$

と近似して整理すると、解はうなりになる。[*1]

[*1] $k = 0$ とした人が複数いたが、問題の意図を汲めていない。そんな自明な問題を解かせるわけがない。何が求められているのか自分で考えること。この手の微小量での展開は物理では非常によく使う手法なので慣れておくこと。