

力学2 演義アドヴァンスト 問題4 2018/05/08

担当教員：富田 賢吾（宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

今日のテーマ：拘束条件・ラグランジュの未定乗数法

問1 [拘束条件と変分法]*1

半径1の球面上の二点を最短距離で結ぶ曲線を求める。

- (1) 球座標で2点間の距離を表し、これを変分法で最小化することによりこの曲線が大円（球の中心を通る平面と球面の交わる線）であることを示せ。
- (2) 球面をデカルト座標で表して、この表面に拘束された曲線の長さを最小化することにより、同じくこの曲線が大円であることを示せ。

問2 [何度目かの振り子]

これまで何度か振り子を扱ってきたが、全て振幅が小さく糸がたるまない場合を考えていた。ここでは大きな振幅で糸がたるむ場合を考えよう。糸の長さを l とすると拘束条件は $r \leq l$ と書けるが、これはホロノミックな拘束条件ではないためそのままでは上手く扱うことができない。しかしこのような場合であってもホロノミックな拘束条件をもとに振り子の運動を調べることができる。以下重力加速度を g とする。

- (1) 糸がたるまない $r = L$ というホロノミックな拘束条件に対しラグランジュの未定乗数法を適用し運動方程式を導出せよ。この時使用した未定係数の物理的意味は何か。
- (2) 糸がたるむ時、その瞬間糸の張力がゼロになる。このことから、どのような場合に糸がたるむ（ホロノミックな拘束条件を破る）か、振り子の最下点での速度を用いて場合分けせよ。
- (3) 糸がたるむ場合、張力がゼロになった瞬間からは重力に従って放物運動する。振り子の糸が水平になる点から測った角度を ϕ で表し、糸がたるみ錘が放物運動をはじめる点を $\phi = \alpha$ として、この放物線の関数形を求めよ。ヒント：放物線と振り子の描く円は $\phi = \alpha$ で滑らかに接する。
- (4) [発表の対象とはしない] 再び糸がピンと張る（放物線が振り子の描く円と交わる）点は $\phi = -3\alpha$ となることを示せ。*2

*1 定番問題だが、計算がやや煩雑で証明の論理も少々難しい。諦めずに取り組むこと。

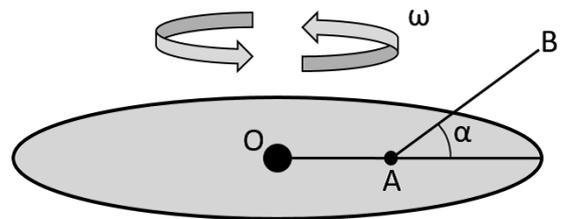
*2 これは担当教員が高校生だった時に同級生の O 君が「発見」し担任が大変喜んだ「定理」であるが、後日既知であることがわかったという思い出の逸品である。担任の口癖は「正しい答えは美しい」であった。残念ながら現実の問題では正しい答えは美しいとは限らないが。

問3 [球面からの落下]

重力加速度を g として、滑らかな半径 a の球面の頂点から質点 m を滑り落とす。質点はある所までは球面に沿って落下し、そこからは球面を離れて自由落下するのであろう。この系も厳密にはホロノミックではないが、前問と同様にしてまず滑らかな拘束条件を考え、束縛力がゼロになるという条件から質点が球面を離れる位置を求めよ。特に、球の頂点から測った角度を ϕ として離れる点 ϕ_c の最大値を求めよ。

*問4 [遠心力による加速] (時間内に扱わなかった場合はレポート課題)

右図のように中心に質量 M のブラックホール (図 O) とその周囲を回転する薄い円盤がある。円盤の中心から半径 a の所 (図 A) に角速度 ω で回転する質量 m の粒子があり、この粒子は OA と角度 α を



なす、同じく角速度 ω で回転する半直線 AB に拘束されて滑らかに運動する (面 OAB は円盤面と直交している)。ブラックホールの重力は通常のニュートンの点源重力場 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ として、以下の問に答えよ。^{*3}

- (1) 粒子のラグランジアンを書き、運動方程式を求めよ。ヒント：円筒座標を用いる
- (2) 点 A では遠心力と重力が釣り合っているとす。角速度 ω を求めよ。
- (3) この粒子の位置を半直線 AB に沿って A からわずかにずらした。この粒子が AB に沿ってそのまま加速される条件を求めよ。^{*4} ヒント： $R = a + \Delta R$, $z = \Delta z$ として Δ の一次の項まで近似する。 ヒント 2：拘束条件により Δz と ΔR は独立ではない。

^{*3} この問題は拘束条件を使わなくても解くことができるが、練習のためラグランジュの未定乗数法を使って解いて欲しい。そうすることで式を立てる見通しも良くなる。

^{*4} この問題はブラックホール周囲のガス円盤から放出されるアウトフローと呼ばれるガス流の非常に単純なモデルになっている。AB とは現実のシステムでは磁力線であり、電離したガスは磁力線に沿って運動する。この加速機構を磁気遠心力と呼び、実際にブラックホールや若い原始星周囲の円盤からはこのような質量放出現象が多数観測されている。なんでこんな意味不明な問題を出すのかと思うかもしれないが、実はこれは大変実用的な天体現象に関係する問題なのである。