力学２演義アドヴァンスト 問題４ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

今日のテーマ：拘束条件・ラグランジュの未定乗数法

問１ [拘束条件と変分法]

(1) 球座標での単位球面上での線要素は $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ なので、

$$l = \int ds = \int d\theta \sqrt{1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}$$

に変分法を適用して最小化する。詳細な計算は CLE で公開されているスタンダードクラスの問題 1 [C.3] の解答を参照。

(2) デカルト座標での線要素は $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ と書けるから、この曲線に沿った距離 s をパラメータとすれば

$$l = \int ds \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

これにラグランジュの未定乗数法を用いて拘束条件 $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ を課すとラグランジアンは

$$L = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

これからオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{d\tau} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = 2\lambda x$$

（y, z についても同様）となる。線要素の定義より $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = 1$ だから、

$$x'' = 2\lambda x$$
$$x = X_+ \exp\left(\sqrt{2\lambda}s\right) + X_- \exp\left(-\sqrt{2\lambda}s\right)$$

（y, z についても同様）となる。この曲線が大円であるには、この曲線が常に原点を通る平面 $ax + by + cz = 0$ 上にあることを示せばよい。即ち全ての s について $ax + by + cz = 0$ を満たす定数 (a, b, c) が存在することを示す。代入して整理すると

$$(aX_+ + bY_+ + cZ_+) \exp\left(\sqrt{2\lambda}s\right) + (aX_- + bY_- + cZ_-) \exp\left(-\sqrt{2\lambda}s\right) = 0$$

となり、$aX_+ + bY_+ + cZ_+ = 0$ かつ $aX_- + bY_- + cZ_- = 0$ であればよい。このような方程式を満たすような (a, b, c) は必ず存在する[*1]ので、この曲線は大円であることが言える。

[*1] これら 2 本の式は 3 次元 a, b, c 空間の平面を表し、それの交差する直線（両式が定数倍で一致する場合には平面）が必ず存在する。a, b, c を同じ定数倍しても同じ平面を表すので、値は一意には決まらない。

問２ [何度目かの振り子]

(1) ラグランジアンは $L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\lambda(r-L)+mgr\cos\theta$、運動方程式は

$$m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2+\lambda+mg\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=-mgr\sin\theta$$

運動方程式から、λ は糸の張力を表す。

(2) 拘束条件 $r=L$ を適用する。r の式から張力は $-\lambda=mL\dot{\theta}^2+mg\cos\theta$。$\theta$ の式に $\dot{\theta}$ をかけて積分する（あるいはエネルギー保存則から）と最下点の速度を v_0 として

$$\frac{1}{2}L^2\dot{\theta}^2+gL(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}v_0^2$$

最高到達点の角度は $\cos\theta_{\max}=1-\frac{v_0^2}{2gL}$ である。$\dot{\theta}$ を消去して

$$-\lambda=\frac{mv_0^2}{L}+mg(3\cos\theta-2)$$

(i) $v_0<\sqrt{2gL}$ の時：最高到達点は $\theta_{\max}<\frac{\pi}{2}$ であり、この範囲では糸はたるまない。

(ii) $\sqrt{2gL}<v_0<\sqrt{5gL}$ の時：$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の範囲のどこかで λ=0 となって糸がたるむ。

(iii) $v_0>\sqrt{5gL}$ の時：振り子の頂点 $\theta=\pi$ でも張力はゼロにならず、糸はたるまない。

(3) 重力で運動する物体は放物線を描くので軌道は 2 次関数 $y=\frac{1}{2}A(x-x_0)^2+B(x-x_0)+y_0$ で書ける。円を離れる角度を α とすると $x_0=L\cos\alpha, y_0=L\sin\alpha$ である。さらにこの点で円と滑らかに接する（1 階、2 階の微分係数が一致する）ことから係数を求めると、$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}=-\frac{1}{L\sin^3\alpha}$ であるから

$$y=-\frac{1}{2L\sin^3\alpha}(x-L\cos\alpha)^2-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(x-L\cos\alpha)+L\sin\alpha$$

重力定数や速度などに依らず単純な数学的議論だけで求められ、結果にも α だけしか現れない。

(4) 略：代入して三角関数の公式を駆使して整理する。

問３ [球面からの落下]

ラグランジアンは $L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-mgr\cos\phi+\lambda(r-a)$。$r$ 方向の運動方程式から、質点が球面から離れない間の垂直抗力は

$$\lambda=mg\cos\phi-ma\dot{\phi}^2$$

ϕ の運動方程式に $\dot{\phi}$ をかけて積分すると $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2=\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2+\frac{g}{a}(1-\cos\phi)$ が得られるので代入すると

$$\lambda=mg(3\cos\phi-2)+\frac{v_0^2}{a}$$

($v_0=a\dot{\phi}_0$）となる。質点は拘束力 $\lambda=0$ となる点で球面から離れる。ϕ_c が最大値を取るのは初速度がゼロの時であり、最大値は $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ である。

問４ [遠心力による加速]

(1) この問題はラグランジュの未定乗数法を使わなくても解けるが練習も兼ねて使ってみよう。誘導通り円筒座標を用い、拘束条件は $z = (R-a)\tan\alpha$ と書ける。ϕ 方向については $\dot{\phi} = \omega$ とすると、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\omega^2 + \dot{z}^2) + \frac{GMm}{\sqrt{R^2+z^2}} + \lambda[z - (R-a)\tan\alpha]$$

運動方程式は

$$m\ddot{R} = mR\omega^2 - \frac{GMm}{(R^2+z^2)^{3/2}}R - \lambda\tan\alpha$$

$$m\ddot{z} = -\frac{GMm}{(R^2+z^2)^{3/2}}z + \lambda$$

(2) $\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$。ボーナス問題である。

(3) 拘束条件を適用し（$\dot{z} = \dot{R}\tan\alpha,\ \ddot{z} = \ddot{R}\tan\alpha$）運動方程式から拘束力 λ を消去する。指示通り $R = a + \Delta R,\ z = \Delta z$（$\Delta z = \Delta R\tan\alpha$）として Δ の一次の項まで近似する。遠心力と重力が零次で釣り合っていることに注意し、一次の項を計算すると

$$(1+\tan^2\alpha)\frac{d^2}{dt^2}\Delta R = (3-\tan^2\alpha)\frac{GM}{a^3}\Delta R$$

となる（面倒に見えるかもしれないが真面目にテイラー展開するだけである）。この粒子が遠心力によって加速され続けるには ΔR の係数が正であれば良い（負の場合は平衡点の周りで振動し安定に留まる）ので

$$3 - \tan^2\alpha > 0 \quad \text{または} \quad \alpha < 60^\circ$$

を得る。結果が系の質量や半径等に依らず決まることに注目してほしい。これは宇宙物理学で知られているブラックホールや原始星周囲の降着円盤からの磁場による質量放出現象の条件（Blandford & Payne 1982, MNRAS, 199, 883）を簡単にモデル化したものである。