

# 力学2 演義アドヴァンスト 問題5 2018/05/15

担当教員：富田 賢吾（宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

## 今日のテーマ：ラグランジュ形式の力学の応用

### 問1 [二重振り子]

長さ  $l_1$  の質量を無視できる棒の先に質量  $m_1$  の錘があり、更にそこから長さ  $l_2$  の棒の先に質量  $m_2$  の錘があるような二重振り子を考える。それぞれの棒は同一の平面内で自由に回転できる。

- (1) この系のラグランジアンを書き、運動方程式を求めよ。
- (2) この系はカオス的な運動をすることが知られていて、一般の場合に解を得るのは非常に困難であり通常は数値計算が用いられる\*1。ここでは簡単な場合として  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$  として更に振幅が十分小さい場合についてこの系の固有振動数と固有モードを求めよ。

### \*問2 [電磁場中の荷電粒子の運動]（時間内に扱わなかった場合はレポート課題）

電磁場中で運動する電荷  $e$  の荷電粒子の運動方程式は（粒子による場への影響を無視すると）

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$
$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

である。ただしここで  $\phi$  はスカラーポテンシャル、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルである。これを与えるようなラグランジアンを考えたい。

- (1) 静電場  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  だけが存在するとき、ラグランジアンを求めよ。
- (2) 相対論\*2を考慮すると電磁ポテンシャルは  $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$  という4元ベクトルとなり、一方非相対論極限において4元速度は  $U^\mu = (c, \mathbf{v})$  と書ける。ミンコフスキー時空の計量テンソルを

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

としてこの二つの4元ベクトルから最も単純なスカラー量を作ると  $\eta_{\mu\nu} U^\mu A^\nu$  と書ける\*3。この量が前問のラグランジアン的一般化であるという予想に基づいてラグランジアンを構成し\*4、このラグランジアンが上の運動方程式を与えることを確かめよ。また一般化運動量を求めよ。

- (3) 電磁ポテンシャルはゲージ変換  $\phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  の自由度がある。問題2 (4/19 配布) 問1 (1) を用いて運動方程式がゲージ変換に対して不変であることを示せ。

\*1 もしやる気があるなら、数値計算プログラムと結果をまとめてレポートとして提出すれば出来に応じて加点する

\*2 電磁気学は本質的に相対論的である。

\*3 同じ記号については縮約（和）を取る、いわゆるアインシュタインの規則を用いている。

\*4 ありていと言えば  $-\phi \rightarrow \eta_{\mu\nu} U^\mu A^\nu$  と置き換えよ、という意味。

### 問3 [倒立振り子]

質量を無視できる長さ  $l$  の棒の先に質量  $m$  を取り付けたものを、質点を上にして立てる。この倒立振り子の根元を鉛直方向に角速度  $\omega$  で振動させる。重力加速度を  $g$  として以下の間に答えよ。

(1) 鉛直方向から測った角度を  $\theta$  とすると振り子の座標は  $(x, y) = (l \sin \theta, l \cos \theta + A \sin \omega t)$  と書けるだろう。 $\theta$  を変数としてラグランジアンを書き運動方程式を求めよ。

(2) 根元が振動していなければこの振り子は自明に不安定であるが、振動が適切な条件を満たしていれば振り子を安定化することができる\*5。これを以下の手順に従って調べよ。

(i)  $\theta$  をゆっくりと変化する成分  $\phi$  と、高速に振動する成分  $\delta$  に分解する： $\theta(t) = \phi(t) + \delta(t)$ 。

(ii)  $\delta(t)$  は根元の振動による振り子の角度の変化を表しているから、

$$\delta(t) = \frac{A}{l} \sin \phi(t) \sin \omega t$$

の形でおおよそ表すことができると期待される。これを運動方程式に代入する。

(iii) 高周波成分の振幅は小さい ( $\delta \ll \phi$ ) と考えて運動方程式の  $\sin \theta$  の項を展開する。

(iv) 高周波成分一周期について時間平均を取る。この時間平均の間  $\phi(t)$  は一定とみなしてよい。

(注： $\dot{\phi} = 0$  という意味ではない。時間平均に対して  $\ddot{\phi}$  も定数とみなして計算する。)

(v) これはある有効ポテンシャルに従う  $\phi$  の運動方程式と解釈できる。 $\phi(t)$  が安定な領域が存在するための  $\omega$  の条件を求めよ。また、安定な範囲の限界の角度  $\phi_{\max}$  を求めよ。(振動がない時の振り子の自然な振動数  $\omega_0^2 = g/l$  を用いること)

(vi) 有効ポテンシャルを求めその概形をグラフに書け。

### 問4 [簡単な剛体の運動]

右図のように半径  $r$ 、質量  $M$  の密度が一様な剛体円板が下方向に重力加速度  $g$  を受けながら半径  $R$  の円の内側に沿って運動している。

(1) 円板が中心の周りに角速度  $\omega$  で回転しながら一方向に速度  $V$  で並進運動している時の運動エネルギーを求めよ。ヒント：円盤の面密度を  $\sigma$  とすると、 $T = \int \frac{1}{2} \sigma |\mathbf{v}|^2 dS$ 。

以下、円板の運動の振幅は小さく最下点付近を運動するとする。

(2) 円板が回転せずに（滑って）運動する時、系の運動を解け。

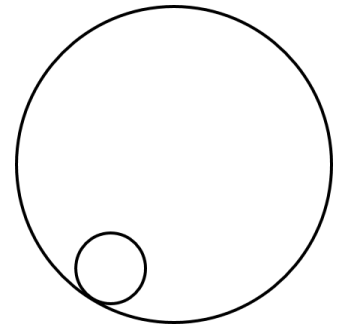
(3) 円板が滑らずに回転しながら運動する場合を考える。

(a) 滑らないという条件から円板の回転速度と運動の速度の間の関係を求めよ。

(b) ラグランジアンを求め、運動を解け。

(c) 振動の周期を求め、円板が回転しない場合と比べよ。また円板半径が無限小の極限を考え、質点の運動との違いを考察せよ。

(4) 凍った缶ジュースと凍っていない缶ジュースを開けずに温度以外で見分ける方法を考えよ。



\*5 この他にも安定化する方法は幾つか知られている。顕著な例はセグウェイあるいは一輪車であり、振り子を水平方向に動かすことで安定化させることができる。皿回しも定性的には同じ理屈で理解できるだろう。しかしこの垂直に振動させる方法が面白いのは、特別な制御を必要としないことである。例えば <https://www.youtube.com/watch?v=rwGAzy0noU0> に動画があるので是非見てもらいたい。