

力学2 演義アドヴァンスト 問題5 解説

担当教員：富田 賢吾（宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

今日のテーマ：ラグランジュ形式の力学の応用

問1 [二重振り子]

有名問題なので答えのみ。運動方程式を立てるのに手間取るような複雑な問題でも解析力学ならば機械的に導出できる良い例（解けるわけではないが）である。一度は自分で計算してみることに。

(1)

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2$$

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 + m_2l_2 \left[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] = 0$$

$$l_2\ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 + l_1 \left[\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] = 0$$

(2) 微小振動の運動方程式は

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0$$

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\frac{g}{l}\theta_1 = 0$$

$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ としてこの方程式を対角化すると固有振動数は $\omega = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\omega_0$ 、固有ベクトルは $(1, \mp\sqrt{2})$ （複合同順）。

問2 [電磁場中の荷電粒子の運動]

略：全て誘導通りに計算するだけである。ベクトル解析の公式が正しく使えない学生が多いことに非常に大きな衝撃を受けた。今後絶対に必要になるので必ず復習しておくこと。また見慣れない表式等を見ても怯まずに、必要なら自分で調べて取り組むこと。大学は自分で勉強する所であると肝に銘じてほしい。

問3 [倒立振り子]

(1) $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ に与えられた座標を代入して

$$L = \frac{1}{2}m \left[l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + (-l\dot{\theta} \sin \theta + \omega A \cos \omega t)^2 \right] - mg(l \cos \theta + A \sin \omega t)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mlA\omega^2 \sin \theta \sin \omega t = mgl \sin \theta$$

(2) 指示通り $\theta = \phi + \delta$ を代入して展開すると $\sin \theta \simeq \sin \phi + \delta \cos \phi$ 。 $\delta(t) = \frac{A}{l} \sin \phi(t) \sin \omega t$ を代入し高周波成分の一周期について運動方程式の時間平均を取ると $\sin \omega t$ に比例する項は周期関数なので全て落ちる。その結果

$$ml^2\ddot{\phi} + mA^2\omega^2 \cos \phi \sin \phi \langle \sin^2 \omega t \rangle = mgl \sin \phi$$

残る $\sin^2 \omega t$ の項は定義通り平均を取る :

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

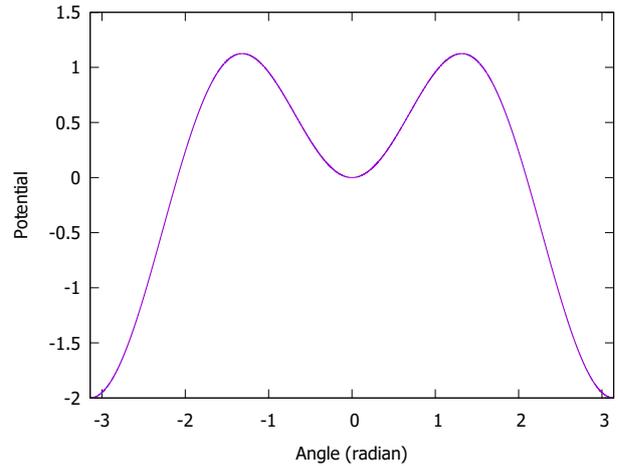
よって運動方程式は $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ とすると

$$\ddot{\phi} = \omega_0^2 \sin \phi \left(1 - \frac{A^2 \omega^2}{2gl} \cos \phi \right)$$

右辺を積分して有効ポテンシャルを求めると、振り子の頂点を $\phi = 0$ として

$$U_{\text{eff}}(\phi) = \omega_0^2 \cos \phi - \frac{A^2 \omega^2}{8l^2} \cos 2\phi$$

振動数 ω が高ければ振り子の最下点だけでなく頂点付近もポテンシャルが極小をとり安定になる。この時概形は右上図のようになる。頂点付近が安定になる条件は運動方程式から $A^2 \omega^2 > 2gl$ 。 ϕ_{max} はポテンシャルを微分して極大値を求めれば良い。



問4 [簡単な剛体の運動]

(1) 円盤の中心を原点とする極座標を用いる。並進方向と回転方向のなす角度を ϕ とし、回転速度は $r\omega$ だから

$$T = \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\phi \left[\frac{1}{2} \sigma (V^2 + Vr' \omega \cos \phi + r'^2 \omega^2) r' \right] = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{4} Mr^2 \omega^2$$

すなわち円盤の慣性モーメントは $I = \frac{1}{2} Mr^2$ 。

(2) 略 : 円盤の回転エネルギーをゼロとする。微小振動の周期は $T = 2\pi \sqrt{\frac{R-r}{g}}$ 。

(3)(a) 円盤の重心の位置を最下点から測った角度 θ で表し、円盤の円弧の長さを角度 ϕ で表すと $R\theta = r\phi$ 。この時円盤が実際に回転した角度は $\alpha = \phi - \theta = \frac{R-r}{r} \theta$ 。

(b) 円盤の重心の速度は $V = (R-r)\dot{\theta}$ 。ラグランジアンと運動方程式は

$$L = \frac{1}{2} M(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + Mg(R-r) \cos \theta = \frac{3}{4} M(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + Mg(R-r) \cos \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(R-r)} \sin \theta$$

(c) 周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

これは回転しない場合よりも $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 倍長い。円盤の回転にエネルギーが使われるためである。 $r \rightarrow 0$ の極限でもこの比は変わらず、周期は質点の振動の場合よりも長い。

(4) 凍っていない缶ジュースは転がしても中身の液体が回転しないが、凍った缶ジュースは中身も一緒に回転する。そのため例えば坂道を転がせば凍っていない缶の方が速く転がるであろう。