

# 力学2 演義アドヴァンスト 問題6 2018/5/22

担当教員：富田 賢吾（宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

## 今日のテーマ：ラグランジュ形式の力学の応用2

問1 [回転系の力学]（量が多いので(1),(2)と(3),(4)に分ける）

(1)  $x, y$  平面内を自由に運動する粒子のラグランジアンを  $z$  軸を回転軸として角速度  $\Omega$  で回転している座標系で求めよ。運動方程式を計算し、それぞれの項の物理的な意味を説明せよ。

(2) 前項の計算を一般化すると、ポテンシャル中を運動する粒子のラグランジアンは回転系で

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2 - V(\mathbf{x})$$

と書くことができる（ $\times$  はベクトルの外積である）。大阪大学の物理学科の建物にあるフーコーの振り子の運動を調べよう。振り子の最下点を中心に、 $x$  軸が真東、 $y$  軸が北極を向き、 $z$  軸が地球の中心の正反対方向となるような直交座標系を導入する。地球の質量を  $M$ 、振り子の長さを  $L$ 、阪大の所在地の北極から測った角度（ $90^\circ$ -北緯）を  $\alpha$  とする。

(a) 運動方程式を（成分ごとに求めるのではなく）ベクトル演算を用いてベクトル表式で求めよ。

(b) 振り子が運動していないとすると、振り子に作用する力は地球の重力と遠心力の合力になる。地球の物理量や阪大の所在地等適当な値を用いて、この「実効重力」\*1と「真の重力」（地球の中心方向）とのなす角を適当な精度で求めよ。\*2

(3) 前問で見た遠心力の効果は十分小さいためこれを無視し、以下では簡単のために有効重力の方向と  $z$  軸を同一視する。また振り子のスケールでは重力は一樣と考えて重力加速度を  $g$  とする。

(a) 振り子の振幅が小さいとして振り子のポテンシャルを  $x, y$  の関数として表せ。

(b) この座標系で  $\boldsymbol{\Omega}$  を表し、運動方程式の  $x, y$  成分を求めよ。振り子の振幅が十分小さければ  $z$  方向の運動は無視して良い。

(c) この運動を解き、初期に振り子のある鉛直面内に揺らした時にその後どのように運動するかを調べよ。特に振動面が回転する周期を求めよ。ヒント：  $X = x + iy$  という変数を導入して複素数で解く。ヒント2：（当たり前だが）振り子の振動数は地球の回転角速度より十分大きい。

(4) 何かの間違いであなたは江戸時代だか中世ヨーロッパだかに飛ばされてしまい、紆余曲折を経て何故か地動説を証明しなければならなくなった。当時の技術で原理的に実現可能であればどのような手法でも良いので、思想や文献ではなく**実験的事実に基づいて地球が自転していることを証明する方法を提案せよ**\*3。

---

\*1 我々はこの方向を「下」と認識している。

\*2 厳密に言えば、実際の地球はそもそも完全な球体ではない（例えば遠心力によって赤道付近が膨らんでいるが、より精密には洋ナシのような形をしているとよく言われる）し、地盤の組成や地球の内部構造の影響等によって重力場はより複雑な構造をしている。しかし、その非理想性を理想的なものから順に拡張して理解していくのが物理学の考え方である。物理学者は丸が好きなのである。

\*3 コミュニケーションや当時の人々の能力に問題はないとする。また、公転を証明する方法も考えてみよ。

\*問2 [強制振動・共鳴] (時間内に扱わなかった場合はレポート課題)

調和振動子に時間に (のみ) 依存する外力を与える。運動方程式は  $m\ddot{x} + kx = F(t)$  と書ける。

(1) 外力も周期的な振動をしている場合を考える。  $F(t) = A \cos(\gamma t + \beta)$  として一般解を求めたい。このような定数係数の非斉次線形微分方程式の解は斉次方程式 ( $F(t) = 0$  の場合) の一般解と非斉次方程式 ( $F(t) \neq 0$ ) の特殊解の和になる\*4。斉次方程式の解は  $x_0 = a \cos(\omega t + \alpha)$  ( $\omega^2 = k/m$ ) である。非斉次方程式の特殊解  $x_1$  は外力による項であるから、解も  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$  の形になると推測してみる\*5。  $b$  を求め、  $x = x_0 + x_1$  が解であることを確かめよ。

(2) (1) の  $b$  は共鳴即ち  $\gamma \rightarrow \omega$  の時は発散してしまう。直観的に共鳴の振る舞いを理解するために、外力による振動の振幅が初期に小さいような解を見つけてその振る舞いを調べたい。斉次方程式の解の線形結合はやはり解であるから、  $x$  に  $-b \cos(\omega t + \beta)$  という項を足してもやはり解である。すると  $x = a \cos(\omega t + \alpha) + b[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)]$  という形になり、第二項は  $\gamma \rightarrow \omega$  で  $0/0$  の形の不定形となる。これをロピタルの定理 (l'Hôpital's rule、知らなければ調べることを) を使って求め、この振動子がどのように振る舞うか論ぜよ。

問3 [剛体の運動]

剛体の回転の運動方程式は角運動量を  $\mathbf{L} = \mathbb{I}\boldsymbol{\omega}$  (または  $L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$ ,  $I_{ij}$  は慣性モーメント)、トルクを  $\mathbf{N}$  として  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$  と書ける。これは剛体の運動によって角度が変化すると慣性モーメント  $\mathbb{I}$  も変化し扱いにくいので、剛体に固定した座標系に乗って考えるのが便利であろう。

(1) 任意のベクトル  $\mathbf{A}$  について、慣性系での時間変化  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  と角速度  $\boldsymbol{\omega}$  (注:  $\boldsymbol{\omega}$  はベクトル) で回転する回転系での時間変化  $\frac{d'\mathbf{A}}{dt}$  の関係が  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$  となることを示せ。

(2) 慣性モーメント  $\mathbb{I}$  は対称なので  $I_{ij}$  が対角行列になるような直交座標系 (慣性主軸) を選ぶことができる。このような座標軸を選び、剛体の各軸の周りの慣性モーメントを  $I_1, I_2, I_3$ 、角速度を  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  と表す。これと (1) を用いて、剛体に固定した座標系で見た各成分の回転の運動方程式 (オイラーの運動方程式) を求めよ。  $\frac{d'a}{dt} = \dot{a}$  と表記して良い。

(3)  $I_1 = I_2$  の剛体が力を受けずに回転する。  $\omega_3$  が与えられた時、  $\omega_1, \omega_2$  が振動する周期を求めよ。地球は厳密には球ではなく回転軸が慣性主軸からずれているためこのような運動をしている。その周期が約 400 日、自転周期が  $T = 2\pi/\omega_3 = 1$  日の時、地球の「歪み」  $\frac{I_3 - I_1}{I_1}$  を推定せよ。\*6

(4) 単位長さ当たりの質量  $\sigma$  を持つ長さ  $2a, 2b, 2c$  ( $a < b < c$ ) の三本の細い剛体棒が中点で互いに直交するような非対称コマを作る。慣性主軸周りの慣性モーメント  $I_1, I_2, I_3$  を求めよ。

(5) 自由回転  $\mathbf{N} = 0$  の時、オイラーの運動方程式を時間微分して角速度の発展方程式を求めよ。

(6)  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_0, 0, 0), (0, \omega_0, 0), (0, 0, \omega_0)$  は自明に解である。ある主軸周りの運動について他 2 軸の角速度が十分小さいとして運動方程式を近似することで各主軸周りの運動の安定性を議論せよ。\*7

\*4 これは難しい話ではない。わからないから無視する・鵜呑みにするのではなく自分で調べること。現代は情報が溢れていて、例えば Wikipedia の「微分方程式」のページにさえこの説明がある。大学は自分で勉強する所である。

\*5 常にこのような単純な方法が上手くいくわけではないが、解が見つければそれで良い。左辺には  $x$  と  $\ddot{x}$  しか現れず  $x$  に  $\cos(\gamma t + \beta)$  を入れれば左辺もそれに比例することが目に見えているので、このような解を試すのは自然。

\*6 このような運動を自由章動あるいは Chandler wobble と呼ぶ。前ページでも述べたがこの見積もりは非常に大雑把で単純化したもので、実際には様々な効果が複合した非常に複雑な運動をしている。

\*7  $I_1 > I_2 > I_3$  の時、  $I_2$  の軸周りの運動は不安定となる。これをテニスラケットの定理と呼ぶことがある。実際に三軸不等の剛体を回転させながら放り投げてみればわかる。これは例えば人工衛星の姿勢や、あるいは体操等の「ひねり」にも関係している。