力学２演義アドヴァンスト 問題６ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

問 1 [回転系の力学] (1) 回転系の座標を (X, Y) としたとき

$$\begin{aligned} x &= X\cos\Omega t - Y\sin\Omega t \\ y &= X\sin\Omega t + Y\cos\Omega t \end{aligned} \tag{1}$$

となるから、ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m\{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \Omega^2(X^2+Y^2) - 2\Omega(\dot{X}Y - X\dot{Y})\} \end{aligned} \tag{2}$$

このラグランジアンにより得られる運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{X} - 2m\Omega\dot{Y} - m\Omega^2 X = 0 \\ m\ddot{Y} + 2m\Omega\dot{X} - m\Omega^2 Y = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで速度に比例する項がコリオリ力、第三項が遠心力。

(2)(a) ラグランジアンの二乗の項を展開した後、変形して微分できる形にすればよい。微分を実行して得られる運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} + 2m(\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{x}}) + m(\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} = 0 \tag{4}$$

となる。

(2)(b) 重力加速度を g、遠心力による加速度の大きさを F とすると真の重力は $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$、実効重力は $\mathbf{g}' = (0, -F\cos\alpha, -g + F\sin\alpha)$ と書ける。真の重力と実効重力のなす角 β は

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}'}{|\mathbf{g}||\mathbf{g}'|} \tag{5}$$

から計算できる。$g \gg F$ を用い適当な物理量を代入して計算すると β はおよそ 0.2 度程度となり、遠心力の影響は非常に小さいことがわかる。

(3)(a) 振り子の振幅が十分小さいとする→ $x^2 + y^2 << L^2$ としてテイラー展開する。

$$\begin{aligned} mgz &= mg\left[L - \{L^2 - (x^2+y^2)\}^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\simeq mg\frac{x^2+y^2}{2L} \end{aligned} \tag{6}$$

(3)(b) 前問の運動方程式から遠心力項を無視すると

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} + 2m(\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{x}}) + \frac{mg}{L}\boldsymbol{x} = 0 \tag{7}$$

今 $\dot{z} \sim 0$ と $\mathbf{\Omega} = (0, \Omega\sin\alpha, \Omega\cos\alpha)$ だから運動方程式を成分で書くと

$$m\ddot{x} - 2m\Omega\dot{y}\cos\alpha + \frac{mg}{L}x = 0$$
$$m\ddot{y} + 2m\Omega\dot{x}\cos\alpha + \frac{mg}{L}y = 0$$

となる。

(3)(c) 変数 $X = x + iy$ ととることにより運動方程式は

$$m\ddot{X} + i\dot{X}2m\Omega\cos\alpha + \frac{mg}{L}X = 0 \tag{8}$$

これを解き、x, y が実数になるよう適当に定数を定めることにより

$$\begin{aligned} x &= C_1\cos(\Omega\cos\alpha\cdot t)\cos(\omega_0 t) \\ y &= C_2\sin(\Omega\cos\alpha\cdot t)\cos(\omega_0 t) \end{aligned} \tag{9}$$

と書ける (C は定数、$\omega_0^2 = g/L$ は振り子の周期)。振動面の回転周期は

$$T = \frac{2\pi}{\Omega\cos\alpha} \tag{10}$$

(4) 公転を証明する場合は光行差や年周視差を用いる等の方法が考えられる。各自調べよ。

問 2 [強制振動・共鳴]

(1) ただ $x = x_0 + x_1$ を微分方程式に代入すれば良い。

$$b = \frac{A}{k - m\gamma^2} = \frac{A}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \tag{11}$$

ここで

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{12}$$

(2) ロピタルの定理を使う。

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{2m\omega}t\sin(\omega t + \beta) \tag{13}$$

となり、振幅が時間に比例して増大する。

問 3 [剛体の回転]

(1) $\boldsymbol{e}$ を慣性系の単位ベクトル、$\boldsymbol{e}'$ を回転系の単位ベクトルとすると

$$\boldsymbol{A} = A_i e_i = A'_i e'_i \tag{14}$$

両辺を時間微分して

$$\frac{dA_i}{dt}e_i = \frac{dA'_i}{dt}e'_i + A'_i\frac{de'_i}{dt} \tag{15}$$

右辺第二項を角速度 ω を用いて表し題意の式を得る。

(2)

$$\frac{dL_i}{dt} = N_i \tag{16}$$

I_{ij} が対角型になるように直交座標系を選び、問 (1) で得られた関係を使えばよい。

$$I_{ij}\dot{\omega}_j + \epsilon_{ijk}\omega_j I_{kl}\omega_l = N_i \tag{17}$$

(3) 式 (17) に $N = 0$ と $I_1 = I_2$ を代入することで

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_1) = 0 \tag{18}$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) = 0 \tag{19}$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0 \tag{20}$$

これらの式から

$$\ddot{\omega}_1 = -\frac{(I_3 - I_1)^2\omega_3^2}{I_1^2}\omega_1 \tag{21}$$

$$\ddot{\omega}_2 = -\frac{(I_3 - I_1)^2\omega_3^2}{I_1^2}\omega_1 \tag{22}$$

を得る。よって ω_1、ω_2 の周期はともに

$$T = 2\pi\frac{I_1}{\omega_3|I_3 - I_1|} \tag{23}$$

となる。地球の場合、この周期を 400 日、$\omega_3 = 2\pi/1$ 日 と考えることで

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \sim \frac{1}{400} \tag{24}$$

となる。

(4)

$$I_1 = \sigma\int_{-b}^{b} dyy^2 + \sigma\int_{-c}^{c} dzz^2 = \frac{2}{3}\sigma(b^2 + c^2) \tag{25}$$

I_2, I_3 も同様。

(5) 代入する。例えば ω_1 について：

$$\ddot{\omega}_1 = \left[\frac{(I_3 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_1 I_2}\omega_3^2 + \frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}\omega_2^2\right]\omega_1 \tag{26}$$

(6) 例えば $I_1 > I_2 > I_3$ の時、2 軸周りの回転を与える（$\omega_2 >> \omega_1, \omega_3$）と ω_1, ω_3 は指数関数的に増大し、不安定となる。1 軸・3 軸周りの回転は微分方程式の係数の符号が負のため振動的な解となり安定である。