力学２演義アドヴァンスト 問題７ 2018/05/29

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

今日のテーマ：ハミルトン形式の力学

問１ [ハミルトン形式]

(1) ハミルトニアンはラグランジアンをルジャンドル変換[*1] $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ により独立変数を $\dot{q}$ から p に取り換えたものである。以下のラグランジアンについて指定した座標系でハミルトニアンと正準方程式を求めよ。

(a) $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)$ （極座標）

(b) $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - e\phi + e\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A}$（デカルト座標、$\phi, \mathbf{A}$ は電磁場のポテンシャル（問題５参照））

(c) $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - V(\mathbf{q})$ （一般化座標 $\mathbf{q}$、ただし a_{ij} は実対称行列で $\det(a_{ij}) \neq 0$[*2]）

(2) 作用 S を $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ を用いて表すと $S = \int[\sum_i p_i\dot{q}_i - H]dt$ と書ける。これに対して p_i, q_i を独立変数として最小作用の原理を用いることで正準方程式を導け。

(3) ハミルトニアンについて $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ が成立する、即ちハミルトニアンが時間に陽に依存しなければエネルギーが保存することを示せ。

＊問２ [散逸のある系]（時間内に扱わなかった場合はレポート課題）

次のような時間に陽に依存するラグランジアンを考える。γ, ω は正の定数。

$$L = \left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)\exp\left(\frac{\gamma t}{m}\right)$$

(1) 運動方程式を求め、γ の物理的意味を説明せよ。

(2) 初期条件を $q = 0, \dot{q} = v$ として運動を解け。ヒント：解を $q = A\exp(izt)$ の形として、A, z を複素数で求める。γ の大小で場合分けせよ。

(3) それぞれの場合について、$q, \dot{q}, p, H$ の時間発展の概形をグラフに書け。

[*1] ルジャンドル変換は独立変数を取り換える変換であるが、単に独立変数を変更するだけなら $f(x) \to f(x(s))$ とすることでも得られる。ルジャンドル変換の利点はその対称性（ルジャンドル変換の逆変換もルジャンドル変換）である。数学的にはルジャンドル変換はある上または下に凸な関数 f(x) を通常 (x,y) の点の集合で表すのに対し、傾きと y 切片で決まるその曲線の接線の集合としても等価に表すことができることに対応する。

[*2] これはラグランジアンが凸関数である条件 $\det(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}) \neq 0$（脚注 1 で述べた条件の一般化）に対応している。この条件は常に満たされるわけではないが、多くの力学系ではこれが満たされるのでここではそれ以外は扱わない。

問３ [調和振動子の位相空間]

N 次元の座標と運動量合わせて 2N 次元の空間を位相空間と呼ぶ。この空間内での「位置」$(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ が系の状態を表し、その運動の「速度」は正準方程式から得られる $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ で表される。

(1) 一次元調和振動子 $H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$ の位相空間でのエネルギー一定の時の軌道は楕円になる[*3]。グラフに長軸・短軸の長さを明示して概形を描け。またその運動の向きも示せ。

(2) 適当に座標を取り直して位相空間上で真円を描くように変換したい。$Q = \alpha q$ とした時、α をどうとればよいか？ ヒント：$\alpha = m\omega$ ではない。Q に対応する一般化運動量 P を考えよ。

(3) 前問で得られた座標 (Q, P) でハミルトニアンと運動方程式を表し、それが元の運動方程式と一致することを確かめよ。

(4) 位相空間上での軌道が円なので、極座標 (R, θ) を導入する。$(Q, P) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$ として、エネルギー E を持つ軌道のこの位相空間における（角）速度 $\dot{\theta}$ を求めよ。これは調和振動子の特徴的な性質と対応しているが、それは何か説明せよ。

問４ [位相空間]

ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2 + \frac{\lambda^2}{4}q^4$$

で与えられる系のエネルギーが正・零・負の場合の位相空間での軌道を描いて運動を論ぜよ。

[*3] ハミルトニアンは系の状態に応じて様々な値を取る「関数」であるのに対し、エネルギーはある状態の「値」である。この関係は量子力学のシュレディンガー方程式ではより明確になり、ハミルトニアンがオペレータであるのに対し、エネルギーは対応する固有値となる。