

力学2 演義アドヴァンスト 問題7 解説

担当教員：富田 賢吾（宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

問1 [ハミルトン形式]

(1) ハミルトニアンは以下に示す。正準方程式は微分するだけなので各自計算してみよ。

$$(a) H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) + U(r)$$

$$(b) H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi \quad (\text{電磁ポテンシャル } \mathbf{A} \text{ や } \phi \text{ は座標・時間の関数})$$

$$(c) H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}^{-1} p_i p_j + V(\mathbf{q})$$

(2) 略：オイラーラグランジアンの方方程式を導いた時と同様に変分 $p' = p + \delta p, q' = q + \delta q$ を行い二次以上の微小量を無視し、積分の両端で $\delta p = 0, \delta q = 0$ 等の端点条件を適用すれば良い。

(3)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt}$$

右辺第二項と第三項に正準方程式を用いると打ち消しあうので右辺で残るのは第一項のみ。

問2 [散逸のある系]

(1) 運動方程式は

$$m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - m\omega^2 q$$

となる。 $-\gamma\dot{q}$ は速度に比例する抵抗（摩擦力）に対応する。

(2) 仮定した解を代入すると、

$$z = \frac{i\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{4m^2\omega^2 - \gamma^2}}{2m}$$

この z の形をみることで運動の軌道がわかる。右辺第一項は摩擦力の項で \exp 減衰を引き起こす。また第二項が実数 ($\gamma < 2m\omega$, 摩擦力が復元力に比べ小さい) ならば復元力の釣り合いの点を中心に振動がおこりつつ減衰、虚数 ($\gamma > 2m\omega$, 摩擦力が復元力に比べ大きい) ならば振動はおこらずに減衰することがわかる。この z (と初期条件から決めた A) を q や p に代入すれば良い。三角関数だけでなく双曲線関数の扱いにも慣れておくこと。

(3) 略： γ が小さい時は p は振幅が指数的増加しながらの振動、 H は正の領域で振動、 γ が大きい時は p は指数的減少、 H は指数的増加に漸近していく。ラグランジアンが時間に陽に依存する場合は H はもはや力学的なエネルギーには対応していないことに注意。詳しい説明が欲しい場合は大貫義郎「解析力学」(岩波書店 物理テキストシリーズ) 第8章演習問題 8.1 を参照。

問3 [調和振動子の位相空間]

- (1) 軸の長さ（の半分）は p 方向に $\sqrt{2mE}$ と q 方向に $\sqrt{2E/m\omega^2}$ で運動は時計回り。
- (2) $Q = \alpha q$ と対応する $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}$ でハミルトニアンを計算すると $H = \frac{\alpha^2}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2\alpha^2}Q^2$ 。これが円になるためには $\alpha = \sqrt{m\omega}$ とすればよい。
- (3) 略：ハミルトニアンは $H = \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2)$ 。
- (4) 正準方程式から $\dot{Q} = \omega P$ 。円軌道の表式を代入すると $\dot{Q} = -R\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}P$ であり、比較すれば $\dot{\theta} = -\omega$ である。これは位相空間の円上を一定の角速度 ω で時計回りに運動することを表している。またこの角速度は初期条件に依らず、調和振動子の振動数が振幅に依らないことを示している。

問4 [位相空間]

例えば $\omega = 1, \lambda = 1$ の時の軌道は下図のようになる。エネルギーが負の時は $q = 1$ または -1 のいずれかの周りを回る（ポテンシャルの極小点回りで振動する）。エネルギーがゼロの場合は両者をつなぐ8の字状の軌道を描く（原点での軌道の傾きは ± 1 であることに注意）。エネルギーが正の時は $q = 1$ または -1 ポテンシャル極小点には束縛されず、その両方を含むポテンシャルに束縛されて大きな軌道を描く。

