力学２演義アドヴァンスト 問題８ 2018/06/05

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

Web サイトのアドレスも変更になります：http://astro-osaka.jp/tomida/mechanics2ea.html

今日のテーマ：ハミルトン–ヤコビの理論、断熱不変量

問１ [ハミルトン–ヤコビの偏微分方程式]

作用 S を時間の関数 $S(q,t)$ と見た時、これはハミルトニアンと $\frac{\partial S}{\partial t}+H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)=0$ という関係を持っている。また $p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}$ という関係が成り立つ。これらから関数 S の従う次のハミルトン–ヤコビの偏微分方程式が導かれる。

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,...,q_N,\frac{\partial S}{\partial q_i},...,\frac{\partial S}{\partial q_N},t\right)=0$$

この方程式から（作用という意味を忘れて）S を求めれば運動を解くことができる[*1*2]。特に、ハミルトニアンが時間に陽に依存しない時には $S=S_0(q_1,...,q_N)+\Theta(t)$ と変数分離すると、

$$H\left(q_1,...,q_N,\frac{\partial S_0}{\partial q_i},...,\frac{\partial S_0}{\partial q_N}\right)=E, \tag{A}$$

$$\Theta(t)=(\mathrm{const})-Et$$

と書き換えられる（これもハミルトン–ヤコビの偏微分方程式と呼ぶ。E はエネルギーに対応する定数)。以下具体的に一様重力場 $\mathbf{g}=-g\mathbf{e}_z$ 中での質点の運動を考えよう。

(1) ハミルトニアン $H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz$ からハミルトン–ヤコビの方程式を作れ。

(2) 変数分離形 $S_0=X(x)+Y(y)+Z(z)$ を (A) に代入すると $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dY}{dy}\right)^2\right]+f_z(z)=E$ と書ける。独立な x,y,z が常にこの式を満たすには x,y,z の項それぞれが定数でなければならないという条件から $\frac{dX}{dx}=a$, $\frac{dY}{dy}=b$, $f_z(z)=c$ と書ける（a,b,c は定数)。f_z の式から Z の微分方程式を求めよ。

(3) S_0 を求めよ。積分定数は無視し、Z は積分形で良い。$p_i=\frac{\partial S_0}{\partial q_i}$ から p_x,p_y,p_z を求めよ。

(4) $S=S_0-Et$（S の定数を無視したもの）について $\alpha=\frac{\partial S}{\partial a},\beta=\frac{\partial S}{\partial b},\gamma=\frac{\partial S}{\partial c}$ を計算せよ。ただしここで E は (2) の式から a,b,c を含むことに注意せよ。

(5) α,β,γ は定数となる[*3]。(4) の結果を整理（適当に定数を取りなおしてよい）すれば、この系の運動が解けたことになる。x,y,z がどのような運動をするか説明せよ。

[*1] これはハミルトニアン H' が定数となるような座標系への正準変換を見つけることに対応している。H' が定数になる (Q,P) と元の (q,p) の間の関係がわかれば、$\dot{Q}=\frac{\partial H'}{\partial P}=0$, $\dot{P}=-\frac{\partial H'}{\partial Q}=0$ から Q も P も定数となり、(q,p) に戻すことで元の空間での運動が解けるのである。これはラグランジュ形式・ハミルトン形式と並ぶもう一つの力学の解法と考えられる。正準変換とはハミルトンの運動方程式が同じ形を保つような座標変換のことであるが、正準変換は次回以降の講義で扱うそうなので今回は天下り的に付き合って欲しい。

[*2] ここで S の一般解を求める必要はなく、完全解と呼ばれる自由度と同じ数だけの任意定数を含む解を求めれば良い。正準変換を含め、詳細は適当な教科書等を参照のこと。例えば原島鮮「力学 II」（裳華房）等。

[*3] これは S がハミルトニアンが定数となる正準変換の母関数であること、この座標では (Q,P) が定数となること（脚注１）を用いている。具体的には定数 a,b,c が P に、α,β,γ が Q に対応している。これがハミルトン–ヤコビ方程式の要点なのだが、正準変換を知らなければ理解できないので今回はそういうものと思って欲しい。

問２ [断熱定理]

系が有界な運動をしており、その運動があるパラメータ λ[*4]で特徴づけられているとする。このパラメータ λ が運動の周期 T と比べゆっくりと変化する時、系のエネルギー E は保存しないが、代わりに一周期について積分を取った作用変数 $J = \oint pdq$[*5]がほぼ一定にとどまる（断熱不変量）[*6]。

(1) 長さ L の一次元の箱に閉じ込められているエネルギー E の自由粒子があり、この箱の長さをゆっくり縮めていくことを考える。ハミルトニアンは $H = \frac{p^2}{2m}$ で与えられる。

(a) まず壁が動いていない場合、一周期について作用変数 J を計算せよ。

(b) 左の壁は動かず、右の壁の速度 V が粒子の速度 $v = \sqrt{2E/m}$ より十分小さいとする。速度 V の壁で反射される前後での運動量の変化や箱のサイズの変化を考慮して、作用変数 J を計算せよ。特に、作用変数が V について展開し J が V の一次のオーダーまででは変化しないことを示せ。

(2) 調和振動子 $H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2)$ の振動数 ω をゆっくりと変化させることを考える。

(a) J を求めよ。ヒント：位相空間の軌道は楕円である。楕円の面積は？

(b) 前述の結果を用いて、ω をゆっくり変化させる（例えば微小振幅の振り子の糸の長さを変える、調和振動子の錘の重さを少しずつ変える）時、その速度や振幅がどう振る舞うか説明せよ。

＊問３ [前期量子論]（時間内に扱わなかった場合はレポート課題）

前期量子論では周期運動について作用変数 J がプランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$（当然だが h は作用の次元を持っていることに注意）の整数倍となるものだけが許されると考える。

(1) 調和振動子について作用変数が量子化される（$J = nh$）ことからエネルギー準位を求めよ[*7]。

(2) ある主軸周りに慣性モーメント I を持つ剛体が回転する。作用変数 J を求めて量子化することによりエネルギー準位を求めよ。[*8]

(3) 水素原子の模型を考える。原子は動かないとして電子のハミルトニアンを球座標で書くと $H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi^2\right) + V(r)$, $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ となり、各変数に対応する作用変数は

$$J_r = \oint \sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}dr, \qquad J_\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}}d\theta, \qquad J_\phi = 2\pi\alpha_\phi$$

と与えられる。$\alpha_\theta, \alpha_\phi$ は Hamilton-Jacobi の方法に現れる定数。束縛状態では $E < 0$ である。

(a) J_θ の積分を実行し、$\alpha_\theta = \frac{J_\theta + J_\phi}{2\pi}$ となることを示せ。ヒント１：まず $\cos\theta = x\sqrt{1 - \alpha_\phi^2/\alpha_\theta^2}$ と変数変換する。ヒント２：次に $\oint \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-ax^2}dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\psi}{1-a\sin^2\psi}d\psi = \frac{2\pi}{a}(1 - \sqrt{1-a})$ を用いる。

(b) 計算を進めると $J_r = \oint \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}dr$ と書ける。A, B, C を求めよ。

(c) 非積分関数=0 となる所が運動の上端・下端となる。これらを求め J_r の積分を実行せよ。注：対称な軌道なので周回積分 $\oint$ は $2\int_a^b$ となる。ヒント：$\int_a^b \frac{\sqrt{(r-a)(b-r)}}{r}dr = \pi\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$。

(d) E を $J = J_r + J_\theta + J_\phi$ で表し、この J が量子化される（$J = nh$）としてエネルギー準位を求めよ。特に基底状態と n が無限大の準位のエネルギー差の具体的な値を eV を単位として求めよ。

[*4] 例えば振り子の糸の長さや、調和振動子のばね定数（または質点の質量）等は運動を特徴づけるパラメータである。

[*5] これは $J = \iint dpdq$ とも書ける。これは位相空間でこの粒子の軌道が占める面積が不変であることを意味する。

[*6] 一般的な証明は例えばランダウ・リフシッツ「力学」の 49 章を見よ

[*7] これは量子力学のエネルギー準位 $E = (n + 1/2)h\nu$ とは半整数分ずれており、これは零点エネルギーと呼ばれる。

[*8] 現代的な量子力学では $E = \frac{h^2}{8\pi^2 I}n(n+1)$ となる。