力学２演義アドヴァンスト 問題８ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

今日のテーマ：ハミルトン–ヤコビの理論、断熱不変量

問１ [ハミルトン–ヤコビの偏微分方程式]

(1)
$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=E$$

(2)
$$\frac{dZ}{dz}=\sqrt{2m(c-mgz)}$$

(3) $X(x)=ax, Y(y)=by$ はすぐにわかる。付加定数を除いて

$$S_0=ax+by+\int\sqrt{2m(c-mgz)}dz$$

$$p_x=a,\quad p_y=b,\quad p_z=\sqrt{2m(c-mgz)}$$

(4)
$$\alpha=\frac{\partial S}{\partial a}=x-\frac{a}{m}t$$

$$\beta=\frac{\partial S}{\partial b}=y-\frac{b}{m}t$$

$$\gamma=\frac{\partial S}{\partial c}=\int\frac{mdz}{\sqrt{2m(c-mgz)}}-t=-\frac{\sqrt{2m(c-mgz)}}{mg}-t$$

(5) a, b を運動量に戻し、定数を適当に取り直すと $x=x_0+v_xt, y=y_0+v_yt$ となり x, y 方向には等速直線運動をする。z 方向については

$$\frac{2m(c-mgz)}{m^2g^2}=(t-\gamma)^2$$

定数を適当に取り直して

$$z=-\frac{g}{2}t^2+v_zt+z_0$$

が得られる。これは放物運動の式である。

問２ [断熱定理]

(1)(a) 答えのみ：$J=2pL=2\sqrt{2mE}L$

(b) $t=0$ で左の壁から出発して戻ってくる一周期を考える。$t=0$ で箱のサイズが L であり、時刻 t に右の壁に到達したとすると $t(v+V)=L$。右に向かって運動している間の作用変数は $J_1=p(L-Vt)=\frac{v}{v+V}pL=\frac{v}{v+V}\sqrt{2mE}L$。壁に反射した後の速度は $v'=v+2V$ でありこの時のエネルギーは $v\gg V$ で展開して $E'=\frac{m}{2}(v+2V)^2\simeq E+2\sqrt{2mE}V$。左に向かっている間の作用変数は $J_2=\sqrt{2mE+2\sqrt{2mE}V}(L-Vt)$。合わせて $J=J_1+J_2\simeq 2\sqrt{2mE}L\left[1-\left(\frac{V}{v}\right)^2\right]$ となり、V の一次では変化しない。

(2)(a) $J = \oint pdq$ は要するに位相空間の軌道の囲む面積である。よって

$$J = \pi ab = \pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{\nu}$$

（ν は振動数）

(b) J が不変だから、ω に比例してエネルギー E が変化し、それに応じて速度や振幅も変化する。

問３ [前期量子論]

(1) 問２ (2)(a) を用いて $E = nh\nu$。量子力学の結果とは零点エネルギーの半整数分ずれる。

(2) 回転角 θ に対応する運動量は $I\dot{\theta} = I\omega$ である。周期が $T = \frac{2\pi}{\omega}$ であることに注意して一周期積分して作用変数を求めると

$$J = \oint p_\theta d\theta = \oint I\omega\frac{d\theta}{dt}dt = I\omega^2 T = 2\pi I\omega$$

これが量子化されるので $\omega = \frac{nh}{2\pi I}$。回転のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{n^2h^2}{8\pi^2 I}$$

これも量子力学の結果 $E = \frac{h^2}{8\pi^2 I}n(n+1)$ とはずれていることに注意。

(3)(a) 略：与えた公式を用いて計算すればよい。

(b) 答えのみ：

$$J_r = \oint\sqrt{2mE + \frac{2me^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{(J_\theta + J_\phi)^2}{4\pi^2 r^2}}dr$$

(c) 答えのみ：

$$J_r = 2\pi\sqrt{-\frac{m}{2E}}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} - (J_\theta + J_\phi)$$

(d)

$$J = J_r + J_\theta + J_\phi = 2\pi\sqrt{-\frac{m}{2E}}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

に量子条件 $J = nh$ を適用して

$$E = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\frac{1}{n^2}$$

定数を入れて計算すると（「具体的な値を求めよ」と問題文にあるはず）

$$E = -13.6\frac{1}{n^2}\ \ [\mathrm{eV}]$$

これは水素原子の量子化されたエネルギー準位である。基底状態 $n = 1$ と n が無限大の準位のエネルギー差は $\Delta E = 13.6\,\mathrm{eV}$ であり、これは水素原子のイオン化エネルギー（電離に必要なエネルギー）である。$E = \frac{hc}{\lambda}$ を用い、二つのエネルギーの準位差を計算すると水素原子のスペクトル線の波長に関するリュードベリ（Rydberg）の式

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

が得られる（R はリュードベリ定数）。