力学２演義アドヴァンスト 問題９ 解説

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

今日のテーマ：正準変換、ポアソン括弧

問１ [正準変換]

略：母関数の導出なので適当な教科書を参照すること。

問２ [シンプレクティック条件]

(1)

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ただし $\mathbf{0}$ は全てが零の $N \times N$ 行列、$\mathbf{1}$ は $N \times N$ の単位行列。$\mathbb{J}$ の関係式は直接計算で確かめよ。

(2) $\partial_i \dot{r}_i = \partial_i J_{ij} \frac{\partial H}{\partial r_j} = J_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial r_i \partial r_j} = 0$（$J_{ij}$ は反対称、$\frac{\partial^2 H}{\partial r_i \partial r_j}$ は対称)。これは力学に従う時間発展では位相空間上の体積が保存することを表している。

(3) $\dot{R}_i = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial R_j}$ と

$$\dot{R}_i = \frac{\partial R_i}{\partial r_k} \dot{r}_k = \frac{\partial R_i}{\partial r_k} J_{kl} \frac{\partial H}{\partial r_l} = \frac{\partial R_i}{\partial r_k} J_{kl} \frac{\partial R_j}{\partial r_l} \frac{\partial H}{\partial R_j}$$

を比較して $\mathbb{MJM}^T = \mathbb{J}$ が得られる。これに左から $\mathbb{M}^{-1}$ をかけて $\mathbb{JM}^T = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{J}$。両側から $\mathbb{J}$ をかけると $\mathbb{J}^2 = -1$ を用いて $\mathbb{M}^T\mathbb{J} = \mathbb{JM}^{-1}$。最後に右から $\mathbb{M}$ をかければ $\mathbb{M}^T\mathbb{JM} = \mathbb{J}$ を得る。またこの式から $\det \mathbb{M} = \pm 1$。

(4) 答えのみ：$\{Q_i, Q_j\} = 0$, $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$ $\{P_i, Q_j\} = -\delta_{ij}$, $\{P_i, P_j\} = 0$。

(5) 答えのみ：$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial r_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial r_j}$

問３ [ポアソン括弧]

(1) 略：定義通り微分するだけ。

(2) 色々な計算法があるが、問２のシンプレクティック表現を用いると便利。

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{\partial g}{\partial r_l} \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} (J_{ij} J_{lm} + J_{lj} J_{mi})$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{\partial h}{\partial r_m} \frac{\partial^2 g}{\partial r_j \partial r_l} (J_{ij} J_{lm} + J_{mj} J_{il}) + \frac{\partial g}{\partial r_l} \frac{\partial h}{\partial r_m} \frac{\partial^2 f}{\partial r_j \partial r_i} (J_{lj} J_{mi} + J_{mj} J_{il})$$

右辺第一項は、括弧の中の第二項で和を取る添え字 j, m を入れ替え、$\mathbb{J}^T = -\mathbb{J}$ を用いると：

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} (J_{ij} J_{lm} + J_{lj} J_{mi}) = \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} J_{ij} J_{lm} - \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_m} J_{lm} J_{ij} = 0$$

他の項も同様にして Jacobi の恒等式を証明できる。

(3) $\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} = -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} = 0$（保存量 f, g は H と交換する。）

(4) (a) $\{p_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} p_k$ (b) $\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k$（$\epsilon_{ijk}$ は完全反対称テンソル）

(5) 中心力場なので粒子はある平面内を運動する。この平面を xy とし、角運動量は $\mathbf{L} = L_z\mathbf{e}_z$ としても一般性は失わない。すると $\mathbf{A}$ は x, y 成分だけしか持たない。計算すると

$$A_x = \frac{1}{Gm^2M}p_yL_z - \frac{x}{r}, \quad A_y = -\frac{1}{Gm^2M}p_xL_z - \frac{y}{r}$$

これらと H のポアソン括弧がゼロになることを示せばよい。対称性から以下 A_x だけ考える。L_z は保存量なので、L_z と H のポアソン括弧はゼロである。

$$\{A_x, H\} = \frac{L_z}{Gm^2M}\{p_y, H\} - \left\{\frac{x}{r}, H\right\} = -\frac{L_z}{m}\left\{p_y, \frac{1}{r}\right\} - \frac{1}{2mr}\{x, \mathbf{p}^2\} - \frac{x}{2m}\left\{\frac{1}{r}, \mathbf{p}^2\right\}$$

$$= -\frac{L_z}{m}\frac{y}{r^3} - \frac{p_x}{mr} + \frac{x(xp_x + yp_y)}{mr^3} = -\frac{L_z}{m}\frac{y}{r^3} + \frac{y(xp_y - yp_x)}{mr^3} = 0$$

となり $\mathbf{A}$ と H のポアソン括弧がゼロとなることが示せる。面倒だがやればできるという確信をもって計算すればよい。

問４ [数値計算法]

(1) $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} - \Delta t^2\left\{\frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial H}{\partial q_i}\right\}$。第二項は一般的にはゼロでないため、本来の（正準変換を満たす）軌道からずれていく。そのずれの大きさは 1 ステップ当たり Δt^2 に比例する。ある時間 T まで積分するには $N = T/\Delta t$ ステップ必要であるから、最終的な誤差は Δt に比例する。この手法を一次精度の陽的オイラー法と呼ぶが、この手法は正準変換を満たさず、エネルギーなどの保存するべき量を保存しないのであまり良い手法ではない。

(2)(3) 略：ポアソン括弧を計算し、合成関数の微分を丁寧にやれば正準変換であることを示すことができる。このような手法は計算誤差自体はやはり Δt に比例するが、元の系の正準変換を満たすという性質を保つ。そのため例えばエネルギー（に修正を加えたもの）が保存する、可逆的（Δt を逆にとれば軌道を逆向きに辿れる）等、良い性質を持っている。例えば天体の軌道を長期間積分するには、このような性質のある手法を使うことが望ましい。実際の数値シミュレーションにはより高次精度のスキームが使われる。